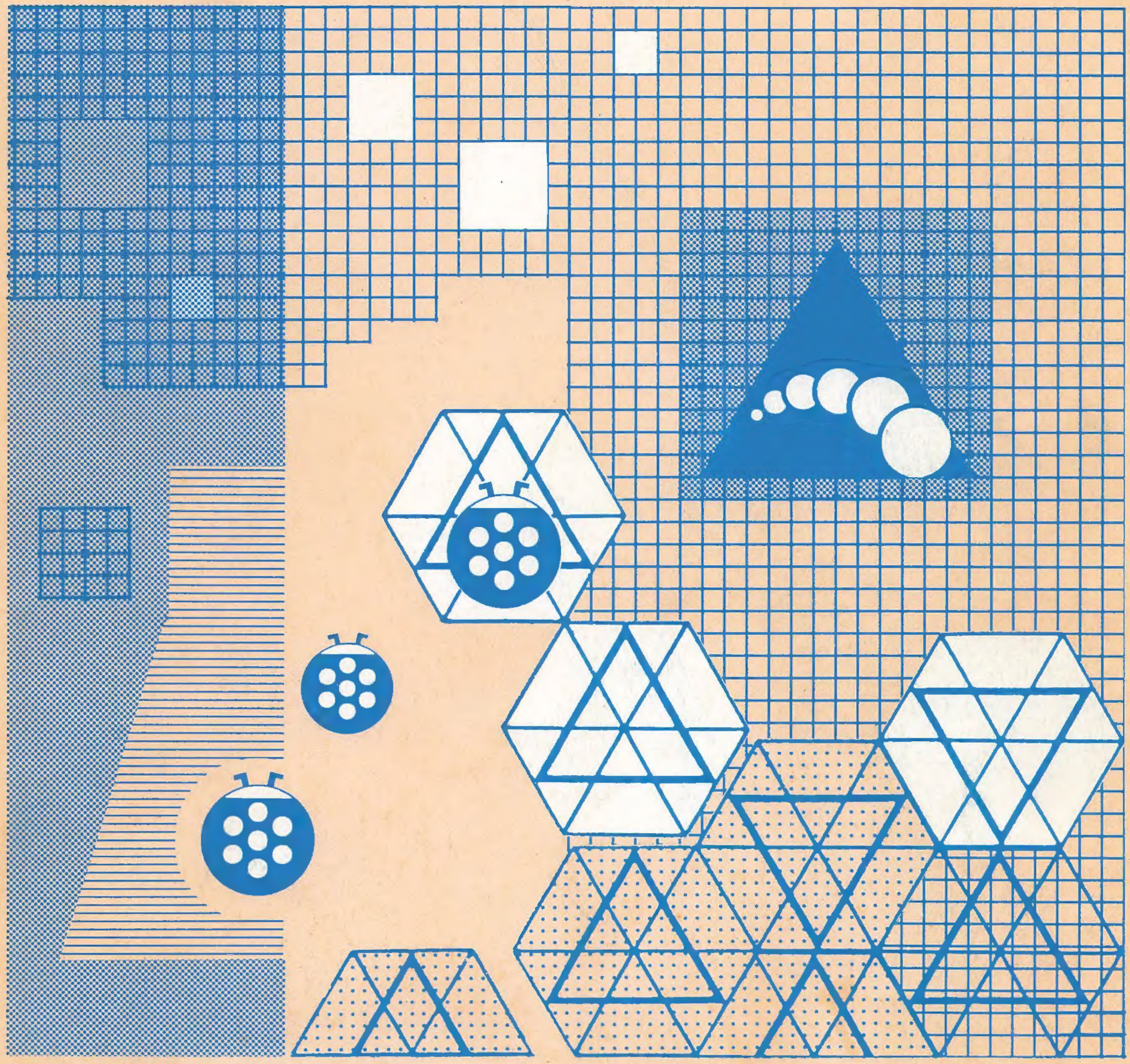
科學教育 月刊

178



國立臺灣師範大學科學教育中心發行
中華民國八十四年三月出版

科學教育月刊

中華民國八十四年三月出版（全年十期，七、八月休刊）

Science Education Monthly

No. 178 March 1995

編輯指導委員會委員：呂溪木（召集人）

王清波	李建興	吳清基
卓英豪	林來發	林昭賢
施　河	許榮富	陳英豪
黃季仁	楊冠政	趙金祁
簡茂發	藍順德	

發行人：魏明通

主　編：彭育才

執行編輯：洪有情

編輯顧問：

方泰山	王執明	余健治
林政宏	黃基礎	張宗仁
趙文敏	鄭華生	魏和祥

編輯委員：

王建都	史金燾	何嘉仁
邱日盛	沈青嵩	沈秀雄
李虎雄	李春生	李嘉淦
林海清	林淑貞	吳瑞謀
洪萬生	陳文典	曾坤地
黃水利	黃長司	黃湘武
楊榮祥	蔡志明	蔡先口
劉謹輔	諸亞儂	鄭湧涇
蕭次融	顏啓麟	蘇德祥

助理編輯：陳洋珍　黃珮瑜

出版者：國立臺灣師範大學科學教育中心

地　址：臺北市汀州路四段88號

電　話：9316273

傳　眞：9327187

印　刷：昶光打字印刷有限公司

地　址：臺北市西寧南路212號3樓

電　話：3317232·3117882

行政院新聞局出版事業登記證

局版臺誌字第一六〇一號

臺灣郵政管理局許可證北臺字第0525號

本刊經費來源：教育部、台灣省教育廳、台北市教育局、高雄市教育局

發行旨趣

一、本刊爲一綜合性刊物，其出版目的如下：

(1)促進科學教育學術研究。

(2)供應科學教育課程資料。

(3)報導政府科學教育法令。

(4)介紹國內外科學教育現況。

二、本刊內容範圍包括**數學、物理、化學、生物、地球科學**。題材以補充中學科學課程與教材，提供教師教學資料爲主。

稿約

一、本刊竭誠歡迎各界惠賜符合發行旨趣之稿件，來稿請用白話文撰寫，並力求通俗易讀，文稿請勿超過壹萬字（特約稿不在此限）。

二、文稿請用有格稿紙繕寫清楚，幷加標點符號，並請注意下列事項：

(1)來稿若爲譯稿，請附原文及原作者同意函影本。

(2)所譯專有名詞，其不常見或初用者，須附註原文。

(3)附圖與註釋，請編列號碼，並在文中註明位置。

(4)參考文獻應依各項參考資料，在正文中第一次被引用之順序標註序號。

(5)附註請於文後，依出現前後次序編號排列。

(6)文稿請複印一份，隨同原稿，一併惠賜，俾便作業。

三、本刊對來稿有刪改權，如有不同意時，請在稿件上註明。如須退稿，請附書妥收件人地址之回郵信封。

四、來稿一經採用，奉致稿酬。一稿兩投，恕不致酬。

五、來稿請註明作者眞實姓名、職稱、服務單位、通訊處，發表時用眞名或筆名悉隨尊意。

六、來稿刊出，版權爲本社所有。

七、作者見解，文責自負，不代表本社意見。

八、來稿請寄臺北市汀州路四段八十八號國立臺灣師範大學分部科學教育中心科學教育月刊社收。

目　　錄

第178期　中華民國八十四年三月

科教論著

當今科學概念發展研究賦予科學學習的新意義
……………………………………………許榮富、黃芳裕　2

課程研究

我國中等學校地球科學課程的回顧與展望…………李春生　14

科學教室

對畢氏三元數公式的一番探索………………………黃敏晃　22

評　量

臺北市八十三學年度高級中學數學及自然學科競賽
數學科複賽試題及參考解答…國立臺灣師範大學數學系　33

教育部八十三學年度高級中學數學競試
決賽試題及參考解答………………………………林來居　40

教育部八十三學年度高級中學化學科競賽
總決賽活動與試題參考解答(二)……………………
…………………………………方泰山、蕭次融、左如茜　50

科教活動報導

教育部八十三學年度高級中學數學及自然學科
資賦優異學生甄試保送初訊………………………編輯室　21

中華民國參加1995 年亞太數學奧林匹亞
競賽名單出爐……………中華民國數學奧林匹亞委員會　70

當今科學概念發展研究賦予科學學習的新意義

*許榮富**黃芳裕
*國立臺灣師範大學科學教育研究所
**國立臺灣師範大學化學系

壹、前　言

科學概念的發展，在皮亞傑學派的「發生認識論（Genetic Epistemology）理念引導下，形成1970 年代以來，科學教育的重要成就之一。

本研究企圖統整這些研究發現，以建立科學學習的新意義。在科學概念發展的研究發現上，將相關文獻依其理論架構的特性區分成下列四個方向：1.人種誌（ethnographic）的研究架構。2.迷思概念（misconcoption）的研究架構。3.社會認知的研究架構。4.心智表徵（mental representation）的研究架構，進行理論結構上的特性、基本主張以及研究發現對「學生科學學習」的可能新意義。

經由相關文獻的分析，在研究者的研究經驗與我國學生的表現特性中，配合現今的哲學理念，提出適合我國學生特性、教育環境等之科學學習模型之芻議，以爲有興趣於我國科學教育的各界人士之參考。

貳、科學概念成長的相關文獻評析

國科會科教處全力支持我國中小學科學教育上「科學概念」之研究，使我國在 1970 年代以來即和風行全球的研究方向，進行同步探討。在此一背景下，分析學生科學概念成長的相關文獻，頗具有獨特的意義及重要性。

科學概念的成長研究，經由Driver（1973）開始做有系統的分析以來，逐漸發展出各種不同類型之研究，像迷思概念（misconception）、前置概念（pre-conception）、替代架構（alternative framework）以及其他相關名詞，成爲全世界有關科學教育的重要方向之一。

不同的學者，在相同的科學概念中，像浮力、莫耳等是以不同的理論結構進行研究，產生各種研究發現而具有不同的詮釋，如West et al.（1983）是以進化（evolutionary）和Kuhn（1970）的革命（revolutionary）做科學概念成長的機制，Gilbert

和Watts（1983）是從批判社會學的結構理論說明整個科學概念的成長，Driver 和 Easley（1978）是從結構論的名詞符號改變或理念改變做分類基礎。國內科學教育的科學概念成長之相關文獻，也有同樣的百家爭鳴之分歧和百花齊放的盛況。

這些不同的理論架構，經由嚴格的評析後，發現彼此之間有著交互纏錯的不可區分狀況，而且彼此之間有著相互補強的能力，因此以「哲學理念」爲分析的基礎，計可區分成下列四個方向：

一、人種誌的研究架構

皮亞傑（1929）經由「人種誌」的研究設計，記錄學童有關月亮移動的科學理念，使人種誌的研究架構成爲探討學生科學概念成長的重要方法之一。

在社會學上，人種誌的研究設計，係假定觀察者在一種毫無偏見的價值中立下，忠誠的記錄所觀察到的各種現象，以呈現出被觀察者行爲表現的特殊性質。

科學概念成長研究，大部分之人種誌設計係以Leboutet-Barrell（1976）的基本假設爲基礎，認爲可以「經由面對面的交談，配合晤談的技巧，形成相關的問題，讓學生理解到在整個晤談裡可以自由的表達而不受干擾，進而釐清出學生的思想」。

Barnes 和Todd（1977）提出晤談過程中，晤談者與學生間的「源自社會機制的不平等關係」而對「自由的表達」提出質疑。Osborne 和Gilbert（1979）對此一質疑提出因應策略，認爲整個研究的結果僅是在「某個情境下」的反應，不能過份的普適化。

Pope 和Keen（1981）以建構論的理念，在Kelly（1955）的「個人建構理論（personal construct theory)」下，發現科學概念的成長與皮亞傑的早期「結構論（structurism）不符合，學生是經由理論導向在回答問題，形成「回答問題的空間」之選擇而產生「替代架構」的研究方向，Engel（1982）在Driver 的指導下，開啓了此方向的探討。

在教學實務的使用上，此理論架構的轉換產物，係以Hewson 和Hewson(1983)與Posner et al.（1982）的概念改變爲成功的範例，Driver 和Oldham (1986) 配合行動研究開發出CLISP（Children's Learning in Science Project）的具體教育範例。

二、迷思概念的研究架構

迷思概念的研究架構，是指在一個特別的科學概念組織下，不同的學生在語言表徵上產生的迷思，以明白學生對學校課程中的「科學概念」在理解過程中的困難，並進行

有效的教學（Viennot, 1979）。

Minstrell（1982）把迷思概念的研究，從學童的表現延伸到教室中的教學活動，發現到「教師」與迷思概念有關。Wells（1984）與Karrqvist（1984）的研究發現「迷思概念」的研究架構，不能單純的從學童呈現之語言加以分析，因爲學童賦予這些語言的「意義」相當含糊，有時甚至是誤解。

Strauss（1983）對迷思概念的研究發現之應用提出質疑，因爲經由迷思概念的技巧，使學生能夠依照規則進行「算術」，但不會轉移到應用題的情境。Caillot（1984）與Joshua（1984）以電路爲單元，也有類似問題。這些研究對「迷思概念」認爲只要明白學生犯錯的方式即能產生有效的指導等理念形成極大的挑戰。

三、社會認知的研究架構

社會認知的研究架構，與前面兩種架構有著極大的差異，其主要的特性是：

1. 科學不是價值中立，學生的科學概念是反映出學生在社會這個大環境下，所形成的理念。
2. 科學的概念不全然是理性。學生的科學概念理念，不是像科學家的單一專業社群，反而像「與日常生活相關」的生活社群，因此文化與科學概念的成長有關。

Nussbaum和Novak（1976）進行不同國家學童對地球之理解，即呈現出這種現象。Sneider和Pulos（1983）則深入到不同的日常生活情境，像社區文化等也影響到科學概念的成長。

Halliday（1978）分析學生的「科學術語」表現，呈現出與人種誌或迷思概念的理性、客觀等基本假設之不同發現，認爲生活文化支配到學生的科學概念成長，並不是從如何推論的思考能力，而從該感受到什麼的理念方向去影響學生的學習，也就是學生的差異不在於思維能力的表現，而是思想的本身。

Redeker（1980）以Husserl的現象學爲理論基礎，發現學生對科學的詮釋是源自日常生活的世界（Life-world），因而引入理性社會現象學的「自然態度」（Schutz & Luckmann,（1973）。Lin（1983）與Solomon（1983, 1984）發現理性社會現象學的單一、自然之共識實體不能解釋學生的表現，因爲學生對「科學語言」並不具共識。Solomon（1993, 1994）更直指對「語言」的基本假設，須從Chomsky（1965）的理性語言結構延伸到無關理性的語言結構。

在此方向的發展，國內研究者許榮富等（許榮富，1993 a-d；許榮富等1994a,b; 1993; 1992 a-c）與Solomon的主張有許多雷同之處。

四、心智表徵的研究架構

心智表徵或心智模型（mental models）的基本架構，與前三者的研究架構不同，主要的差異在於下列特性：

1. 科學概念的成長，並不是單純的語意符號而已，應該有非語意的心智活動，也就是認爲科學概念的本身不是價值中立，不僅是與個人建構有關，如Kelly（1955）的個人建構理論之主張，而且是與外在的世界或社會環境有關。
2. 外在世界與個人的關係，可以經由心智表徵的運作加以分析，也就是研究的重心並不是在於學童如何給予科學符號意義，必須深入到學童如何看外在世界和如何建構外在世界的意義。

在前面敍述的兩個特色下，心智表徵的研究架構與傳統的科學哲學主張有下列不同之處：

1. 科學知識的成長與個人的認識論（Epistemology）有關。也就是個人對科學本體（ontology）主張會支配到個人的科學知識成長。較重要的本體主張有：㈠科學的眞理（truth）。㈡科學的實體（reality）。㈢科學的語言（linguistic）（趙金祁等，1994，1993，1992）。
2. 科學知識的組織或表徵與情境有關。不是自然的存在（natural）而是個人依其目的論（telelogy）的期待（desire）而創立（invented）（趙金祁，1993）。

心智模型的研究者Johnson-Laird（1983）對科學思維是「經由不斷修正以形成較完整的知識」提出挑戰，直指內省法（introspection）僅能呈現出單一線性思考，而忽視了整個過程間的動態關係。

Bliss（1993）經由心智表徵之研究，指出皮亞傑（1978）早期的發生認識論中的結構論（structuralism）把知識區分成「知道什麼（what）和知道爲什麼(how)」存在問題，因爲科學知識本身並不全是語言的形式命題之思想（propositional formal though）。Greene（1994）則經由主張個人認識論介入知識的建構，認爲Halliday（1978）的主張「學生知識表徵的分歧，不是思維能力或形式的不同，應是個人的思想意識不同」，值得重視，強調後現代哲學理念上的Derrida、Foucault等學派主張，認爲思想的意識形態（ideology）在科學知識的結構上有其空間。

國內的研究，在此方面也有類似的突破，許榮富（1993 b）在心智表徵上以「力的概念」發現Gree（1994）的主張，稱爲「心智表徵的精緻結構」。許榮富等（

1994 a.b ）延伸科學知識認識論的主張（許榮富 1993 a ）發現 Solomon （ 1994 ）在科學語言上的主張，認爲語言（ linguistic ）在科學教育理念上，應該可以延伸 Chomsky （ 1965 ）的理性主張到後結構論（ post-structuralism ）的領域，恰巧和 Greene （ 1994 ）的理念一致。

參、科學概念發展研究賦予科學學習的新意義

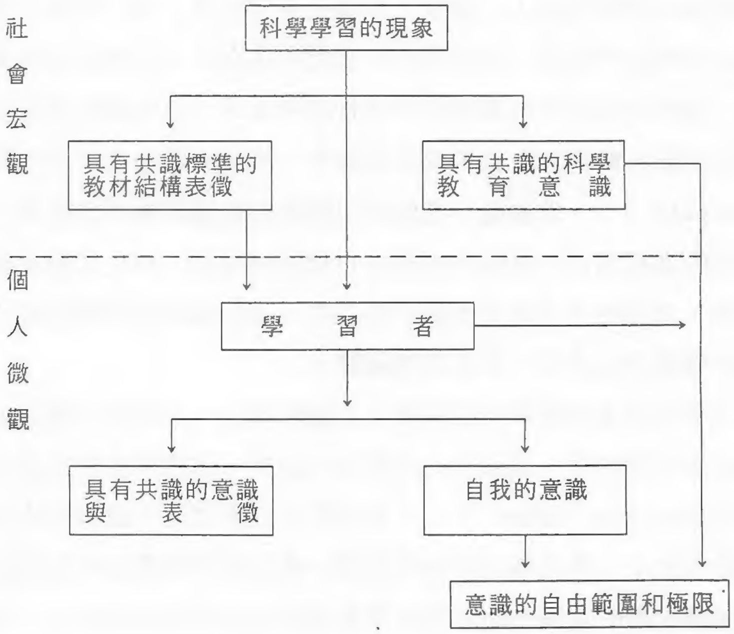
經由二十多年來，各國在科學概念發展研究之相關文獻分析，形成人種誌、迷思概念、社會認知和心智表徵等四個較明顯的可區分之相互補強之方向。現配合我國相關的研究發現以及科學哲學理念，統整出適合於我國學生科學學習的新意義。

一、科學學習的新內涵

人種誌的研究架構，係將個人的主義因素加以排除，認爲每個人皆能以理性的自我，去取得存在於個人之外的客觀之自然世界而能有共同的見解。這種主張與傳統的科學哲學主張一致，認爲要明白科學須有三個獨立的方向：第一是調查的理論架構，第二是調查的方法學結構，第三是調查的方向。這些主張在 Leboutet-Barrell （ 1976 ）的單一共識之實體下和每個人都完全平等的狀況下，是可以遵行的架構。但是研究結果發現外在世界與個人的認識論有關（許榮富， 1993；Greene， 1994 ），因此在使用科學符號與個人的意識（ consciousness ）是同時存在。這個發現說明在科學學習的過程裡，同時有兩個方向，一個方向是共同使用的表徵，這些表徵有科學的符號、概念、技術、活動等，可以直接從外顯性行爲加以區分。假若科學的表徵是一種自然的、共識的常識（ commonsense ）， 那麼另一個隱藏於內在心智的意識是沒有存在的必要，科學學習的內涵將是一系列的程序（ process ）而已，迷思概念的研究架構，發現單純的程序不能形成概念的轉換使用（ Caillot, 1984； Joshua， 1984 ），因此眞正的理解是隱藏於內在心智意識的創新，此時科學學習的內涵已從程序進入到生產（ product ），是一種更新的運作。

社會認知的研究架構，發現學童的科學學習與學童的認識論有關（ Halliday,1978)。因此隱藏於內在的心智意識，可以區分成兩種，一種是個人意識到（ awareness ）在科學學習中受到外在社會的意識限制，而社會意識的存在並不是單一的形式（ Soldornon, 1994 ）， 如何配合情境或環境的期待，形成合適的表徵是一種選擇，如趙金祁等（ 1994 ）以「能」詮釋精誠金石爲之所開，但不將「能」窄化成科學的物質化之「原子能」，更不能因滿足理性、實用的法則，故意忽視「能」與「原子能」的差異，以建立

起虛僞的共識實體而謊稱爲「自然態度」的生活世界。這種選擇使學生呈現出的科學知識表徵，除表現的形式外，還有學生掌握社會意識的理解狀況。科學概念的成長在科學學習的教育過程裡，我們將前面的討論加以整理，應有下列模型（圖一）的系統結構。



圖一　科學學習的內涵

二、科學學習的新意義

模型內的各種活動與活動間的相互關係，在科學學習的詮釋如下：

社會認知的研究架構，不僅發現文化與科學學習有關，而且也發現到生活社群亦是一個重要因素，因此在科學學習的過程裡，除過去 Ausubel（1963）強調以學生能理解爲起點的有意義學習外，尚且須重視學生在不同生活社群中的差異；同時心智表徵的研究架構，不僅發現意識（consciousness）有個人與社會的不同表現，而且也發現到學生的認識論介入科學知識的建構，其中有不同的「意識到（awareness）」之表現。因此，每個不同的科學知識表徵，不能只是視成源自不同技術的結構表現，Halliday（1978）認爲這是源自不同的社會意識。這些研究發現，使科學學習在社會宏觀面上提供科學學習者之環境必須同時兼顧到科學教育的意識、科學教育的表徵和科學教育的方法，爲一完整型系統。這個完整型系統有下列特色：

㈠ 在課程的設計方向，傳統的科學化分析模式（如泰勒模型等）所忽視的科學教

育意識，必須加以重視。也就是科學和其他的學科一樣，不能獨立於社會之外而成爲自然存在的狀況。科學教育的系統有其多元性的狀況，如何重視社會意識、生活社群等值得探討。

(二) 在教師的教學活動上，傳統的科學化學習方式（如：行爲目標）僅重視個體是否能有期待的表徵，值得檢討。我們認爲在此方向教師有兩種方向的新意義。

第一個方向是具有共識標準的教材結構表徵，是由教師傳授給學生。由於教師個人認識論會進入到整個教學活動中，傳授的訊息並不是單純的「媒介（mediate）」，即教師不是像複印機般的忠誠反映共識結構，教學活動也不是單純的過程而已，教師必須經由科學教育意識，產生社會對教師所期待之結果。因此，教師的角色有重新探討的空間，如何經由教育機制建立勝任教師角色之評估與培育也是另一個重要的問題。

第二個方向是科學教育意識賦予教師的權力。在社會宏觀面上，科學教育意識勢必由目前的單一意識進入到多元化結構，學校將面對意識多元化之「自由空間（freedom space）」，如何配合社區文化、教育政策等會使學校的結構在自主性上，產生權力結構的調整。教師除須理解社會宏觀的意識外，更須理解學校社群的意識。這將使社會對教師角色所期待的能力、功能等產生調整。此方向値得重視。

(三) 在學生的學習上，心智表徵的研究架構呈現出學習者在科學學習過程裡有兩種不同的表現。第一個方向是迷思概念研究架構所重視的學生使用什麼科學術語、呈現出什麼科學知識表徵與人種誌的學生意識到那些意識，或學生與所謂的生活世界之常識有那些不同，進而如何要求學生擁有這些共識的常識。假若科學知識就是眞實世界的反映，也就是科學的意識是獨立於人、社會和時間而爲「自然存在」，那麼第二個方向是不存在的。然而近代的科學意識已擺脫「自然存在」（如：Kuhn, 1970; Laudan, 1984），因此第二個方向成爲必須重視之領域。

第二個方向是源自學生個人認識論「意識到」的自我意識。人種誌的研究架構發現「意識到」與個人和社會有關，迷思概念研究則發現與教師有關，社會認知的研究架構則發現「意識到」在科學領域裡，幾乎是被忽略的領域，因爲大多數的學生不理解科學意識有其極限。心智表徵研究發現「意識到」的運作，必須從個人的認識論產生「異質化」才能存在（Greene, 1994），因此在很

強的實證權威限制下，大多數學生在科學意識上，係以單一的霸權狀況去接受科學典範，形成「意識行為但未意識到（consciousness but unawareness）」（許榮富等 1994a）。 如何使科學學習能深入到學生理解自我意識與科學意識間的差異性，進而明白在學習過程裡的「意識自由空間和極限」，讓學生能夠正確使用科學知識，能夠配合不同的社會環境，做出正確的調整，使科學的益處充分發揮造福人群且不致產生因「誤用」而禍及全人類之負面產物，確是科學教育的時代任務。

肆、結　語

科學概念發展的研究，從早期的客觀、理性、自然之哲學理念，採用實證經驗、價值中立、理性邏輯的方向進行每個基本單元或概念名詞的分析，逐漸的進入到目前的個人認識論之介入，無關理性的典範意識、個人與社會交互作用的「意識到」運作，使方法學的重心從學生使用那些符號，那些知識結構等，延伸到學生如何選擇意識和知識系統，把研究的本體從科學意識是一系的訊息組成以及每個訊息可從符號經由定義等形成知識的經驗內涵，延伸到科學意識是一種理念並且是與個人、社會及時間相關的本體，組成當今科學認識論之內涵（許榮富，1993a）。這些改變使得科學的學習有新的意義（如：許榮富等，1994； Greene，1994； Solomon，1994），頗值我們重視。

參考文獻

許榮富（1993a） 科學知識認識論的新詮釋及其對科學教育研究的衝擊。中華民國第九屆科學教育學術研討會論文彙編。

許榮富（1993b） 科學知識之推論理解的精緻結構化心智模型。1993 年國際科學教育詮釋性研究研討會。

許榮富（1993c） 科學知識心智模型與科學態度潛在特質之 Rasch 模型分析研究。國立臺灣師範大學學報，38 期， pp.111-155。

許榮富（1993d） 科學知識理解與推論機制的基本資料之建立（Ⅱ）：科學知識之推論理解的心智模型。國科會研究報告，NSC-82-0-111-S-003-041。

許榮富（1992a） 科學教育的科學與認知科學。中華民國第八屆科學教育學術研討會論文彙編。

許榮富（1992b） 科學知識理解與推論機制的基本資料之建立（Ⅰ）：科學知識

理解的表徵研究。國科會研究報告，NSC-81-0111-S-003-501。

許榮富、邱莉華（1993a） 學生對平面之運動獨立性之推論理解。物理教育年會論文彙刊。

許榮富、黃芳裕（1994a） 以後現代哲學理念探討學童認識科學現象的符意與形成知識的心智表徵。中華民國第十屆科學教育學術研討會。

許榮富、黃芳裕（1994b） 從科學知識組織建構之理念詮釋學生力概念的心智表徵。中華民國第十屆科學教育學術研討會。

許榮富、黃芳裕（1992a） 學生使用科學知識的省察力發展之分析。1992。中華民國物理教育學術研討會論文彙編，pp.163-197。

許榮富、黃芳裕（1992d） 職前科學教師科學知識省察力發展分析。中華民國第八屆科學教學學術研討會論文彙編。

許榮富、古智雄（1992c） 二元編碼理論在國中生凸透鏡成像心智表徵上的研究。中華民國物理教育智會論文彙刊。

趙金祁（1993） 三維人文科技通識架構芻議。科教月刊，160期，pp.10-17。

趙金祁、許榮富、黃芳裕（1994） 當今通識教育理念賦予科學教育的新功能。科教月刊，171期，pp.2-11。

趙金祁、許榮富、黃芳裕（1993） 科學哲學對科學知識組成之主張及其演變。科教月刊，161期，pp.4-17。

趙金祁、許榮富、黃芳裕（1992） 科學哲學對科學知識主體主張之演變。科教月刊，154期，pp.2-18。

Ausubel, D.(1963). The psychlogy of meaningful verbal learning. Greene & Stratton, New York.

Barnes, D. and Todd, F.(1977). Communication in small groups. routledge & Kegan Pul, London.

Bliss, J.(1993) the relevance of Piaget to research into children's conceptios. in Black, P.J. & Lucas, A.M.(ods) Childre's informal ideas in acience. Routledge, London, PP.20-44.

Bourdieu, P.(1977) Outline of a theory fo practice. Cambridge University Press, Cambridge.

Caillot, M.(1984) "Problem representation and problem solving procedres in electricity. In Duit, R., Jung, W. and Rhoneck, c.(eds) Aspects of understanding electricity. IPN, Kiel, pp.139-52.

Chomsky, N.(1965) Aspects of the theory of syntax. MA: MIT press, Cambridge.

Driver, R.(1973) "The representation of conceptual frameworks in young adolescent science students.' PhD thesis, University of Illinois, Urbana, Illinois.

Driver, R. and Easley, J.(1978) 'Pupils and paradigms: a review of literature related to concept development in adolescent sciience students." Studies in Science Education, 5: 61-84.

Driver, R. and Oldham, V.(1986) 'A constuuctivist approach to curriculum development in science.' Studies in Science Education, 13:10 5-22.

Engel, E.(1982) "An exploration of pupils' understanding of heat, pressure and evolution.' PhD thesis, University of Leeds.

Gilbert, J. and Watts, M.(1983). ' Concepts, misconceptions and alternative conceptions: changing perspectives in science education." Studiew in Science Education, 10:61-98.

Greene, M.(1994) 'Epistemology and educational research: The influence of recent approach to knowledge.' Review of Research in Education, 20:423-464.

Halliday, M.(1978) Language as social semiotic. Edward Arnold, London.

Hewson, M. and Hewson, P.(1983) 'Effects of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning.' Joutnal of research in Science Teaching, 20(8): 731-43.

Johnson-Laird, P.(1983) Mental models. Cambridge University Press, cambridge.

Joshua, S.(1984) 'Students' interpretations of simple electrical circuit diagrams.' European Journal of Science Education, 6:271-5.

Karrqvist, C.(1984) 'The development of concepts by means of dialogues centred on experiments.' In Duit, R., Jung, W. and Rhoneck, c.(eds) Aspects of under-standing electricity. IPN, Kiel, pp.215-26.

Kelly, G.(1955) The psychology of personal constructs. W.W. Norton, New York.

Kuhn, T.S.(1970) The structure of scientific revolutions. Cambridge University, Cambridge.

Laudan, L.(1984) Science and value. University of California, Berkeley.

Leboutet-barrell, L.(1976) 'Concepts of mechanics among young people.' Physics Education, 11:462-5.

Lin, H.(1983) 'A cultural look at physics students and physics classromms: an example of anthropological work in science education.' In Helm, N. and Novak, J.(eds) Proceedings of the international seminar on misconceptions in science and mathematics. Cornell University, Ithaca, NY.

Minstrell, J.(1982) 'Explaining the "at rest" condition of an object.' the physics Teacher, 20:12-14.

Nussbaum, J. and Novak, J.D.(1976) 'An assessment of children's concepts of the earth utilising structured interviews.' Science Edcation, 60:535-50.

Osborne, R. and Gilbert, J.(1979) An approach to student understanding of basic concepts in science. Occasional paper. University of Surrey, Guildfor.

Piaget, J.(1978) Success and understanding. Routledge & Kegan Paul, London.

Piaget, J.(1929) The child's conception of the world. Paladin Press, London.

Pope, M. and Keen, T.(1981) Personal construct psychology and education. Academic Press, London.

Posner, G., Strike, K., Hewson, P. and Gertzog, W.(1982) 'Accommodation of a scientific concept: towards a theory of conceptual change. ' Science Education, 66:211-27.

Redeker, B.(1980) 'The difference between the life-world of children and the world of physics: a basic problem for teaching and learning mechanics.' Lecture given at the Universitat-GH-Pderborn.

Schutz, A. and Luckmann, T.(1973) Structures of the life-world. Heinemann, London.

Sneider, M. and Pulos, P.(1983) 'children's cosmographies: understanding the earth's shape and gravity.' Science Education, 67:205-21.

Solomon, J.(1994) 'The rise and fall constructivism.' Studies in Science Education, 21, 1-20.

Solomon, J.(1993) 'Four frames for a field.' In black, P.J. & Lucas, A. M.(eds) 'children's informal ideas in science.' Routledge, London, pp.1-19.

Solomon, J.(1984) 'Prompts, cues and discrimination: the utilization of two separate domains of knowledge.' European Journal of Science Education, 6:277-84.

Solomon, J.(1983) 'Learning about energy.' PhD thesis, Chelsea college, University of London.

Strauss, S.(1983) 'Engaging children's intuitive physics concepts via curriculum units: the cast of heat and temperature.' In Helm, H. and Novak, J.(eds) Proceedings of the international seminar on misconceptions in science and mathematics. Cornell Univesity, Ithaca, NY, pp.292-303.

Viennot, L. 1979. 'Spontaneous reasoning in elementary dynamics.' European Journal of Science Education, 1:203-21.

West, L., Pines, L. and Sutton, C.(1983) 'In-depth investigation of learner's understandings of scientific concepts and theories.' Occasional paper, University of Leicester.

★

我國中等學校地球科學課程的回顧與展望

李春生
國立臺灣師範大學地球科學系

壹、高級中學部份的回顧與檢討

一、課程的沿革

民國60年2月，我國修訂公佈「高級中學課程標準」，首將地球科學納入高三自然組學生必修課程之內，並於民國61年開始實施。可是先後經過民國66年及民國70年台灣省之「高級中學科學教育實施成果評鑑」及「追踪評鑑」，均發現此一階段之地球科學教育，少有正常教學的情況，且無實驗活動教學之安排，以致完全失敗，故到了不得不喊停的階段。此外王其允等*(民國62年)及洪秀雄**(民國68年)對於這一階段的地球科學教科書均有許多不滿意的評語。

爲了提高高中學生地球科學的素養，於是在民國72年7月修訂高級中學課程標準時，又重新設計地球科學之課程，將爲時一學期之基礎地球科學納入高一學生必修課程之內，而爲時各一整年之地球科學(一)及(二)列入高二及高三學生之自然科學選修科目之中。當時由國立台灣師範大學科學教育中心召集之地球科學教材編輯小組成員，負責編輯基礎地球科學、地球科學第(一)、(二)、(三)、(四)冊等五本教科書，基礎地球科學實驗手册和地球科學實驗手册第(一)、(二)、(三)、(四)册等五本實驗手册，及編輯基礎地球科學教師手册(全一册)、地球科學教師手册第(一)、(二)、(三)、(四)册等五本供做教學之用，但其中第(四)册迄今仍未出版。

民國72年新修訂的課程，從民國73學年度起(即73年9月)全面實施，到民國76年6月爲止，剛好完成一個三年輪廻，於是教育部於民國78年又針對此一輪廻之高中地球科學教育實施成果再度進行評鑑。

二、實施成果評鑑

(一) 民國66年台灣省教育廳之評鑑結果

甲、課程教材部分：

---

* 王其允等(民62)科學月刊 62年-9月號，第43～47頁。

** 洪秀雄(民68)科學月刊 68年-4月號，第12～14頁。

1. 教材又廣又繁，但解釋過於精簡，不易了解。
2. 教學時數不敷。
3. 部分教材內容與物埋及地理學科重複，缺乏橫的連繫。
4. 多數學校僅講授部分課程。

乙、一般建議：

1. 請教育部嚴令全國高中認眞執行地球科學之教學。
2. 請教育部於三年內將地球科學列爲大專入學考試科目之一。或可在日前應考科目（如物理）中，增列若干分數作爲地球科學命題之用。
3. 將地球科學列爲必修科排在高一，或仍爲自然組必修科排在高二，以免高三因受升學壓力，不能正常教學。
4. 在師大物理系地球科學組未有畢業生之前，各校應規定相關科系畢業生擔任「專任教師」。如時數不足，亦應指定一人兼任。
5. 繼續加強地球科學師資訓練，改進調訓方法：(1)將訓練科目分爲天文、氣象、海洋、礦物岩石、地質等五科目。(2)每期訓練只辦一科目。(3)委託有關科系之大學，主持某科目之師資訓練。(4)成績及格者教育部應承認其學分。
6. 師大物理系地球科學組課程應與中學教材之需要密切配合，避免偏頗。
7. 請教育廳邀請教授專家組織巡廻輔導小組，定期輔導各校地球科學之教學。
8. 各校應積極添購地球科學設備。或由教育廳統籌配發或由專家列具標準，由各校逐年添置。
9. 教育部或學術界及教師宜組織全國地球科學教師協進會，交換教學意見。
10. 請教育廳編列專款編譯有關地球科學之圖書。
11. 教育機構或學校出版地球科學月刊。
12. 各校應該設有地球科學專用實驗室，配以儀器及教師研究室，並由專人管理。
13. 建立每年二、三次追踪考核制度。

(二) 民國78年教育部之評鑑結果

1. 學生在聯考升學壓力下，不考地球科學，要期望地球科學教育落實，相當困難。在目前的制度不能改變的情況下，仍希望地球科學教育發揮稍大的效果，茲建議兩項：

(1) 不惜再花鉅資，請各門專家把內容改寫及更簡化、更通俗，而且加入更多

台灣地區性的資料，使老師易教，學生易懂。

(2) 使教地球科學而本身不是地球科學系畢業的老師，都能接受短期或中期的講習，使他更適合教地球科學，也更能引導學生的興趣。

2. 綜合而言，地球科學教材在內容上過於深入、過於細膩，不少條例式的寫法，易使中學生產生枯燥感，建議以生活有關的身邊例子，以整合式的寫法來介紹地球科學中的一些已知的觀念與原理，儘量減少公式。實驗部份宜增加並多做野外觀測採集或參觀天文台、博物館等。畢竟地球科學的對象就是包括地球在內的宇宙本身，絕對有必要多做自然界現象的觀測。

3. 基礎地球科學課程在目前的聯考環境下應做較大幅度的更改，並好好的重新編訂教材，加重日常生活相關或常接觸的現象與問題，以提昇學生學習興趣。

4. 教材內容敍述應偏重觀念性，名詞的解釋儘量簡化，舉例說明時，多舉一些生活上的和鄉土的教材通俗例子較好。

5. 教科書內容涵蓋廣泛，圖表文字還算清晰，但寫法似乎太偏重敍述，對於現象的解釋太直接且太具權威性，應可就各種可能解釋的理由或學說並列，以啓發學生的思考，部份習題亦缺少腦力激盪的效果。

6. 編排的程序由礦物岩石開始，宇宙觀反在最後，似難引起學生興趣而失去吸引，如順序調整，可以收到較佳效果。

7. 專有名詞太多，應刪減，或加星號，以減少學生死背書的負擔。

8. 各章節中之公式，若未能適當講解或未能配合相關學科課程，均應加星號（尤其基礎地球科學）。

9. 在目前師資不足之情況下，教師手册爲必要之教學工具，應先發手册，讓老師有充份時間準備。

10. 部份實驗課程，如校外參觀、野外實習、夜觀星象等，在每週三小時教學時數下，似無法執行，實有修訂之必要。

11. 基礎地球科學教科書應如地球科學㈠、㈡、㈢及㈣册備有中英文名詞索引。

12. 第四册第一章有關肉眼觀星的部份，因此部份學生較感興趣，可再加強，而第三章內容則可稍加簡化。

13. 地球科學㈠、㈡的教材內容除了進一步介紹地球科學的各項內涵外，並應有訓練學生從事科學探索，求知的基本技巧。

14. 教材中之礦岩、氣象、天文部份內容太多，部份應可刪減。

15. 教材中應分別加入地質、大氣、天文等之科學發展史。

16. 增加教師進修機會，內容應包括如何教授地球科學。

17. 教材內容似可考慮加入環保污染問題，提高學生學習興趣。

貳、國民中學部份的回顧與檢討

一、課程的沿革

在民國 57 年以前，也就是未實施國民教育九年一貫制度之前，我國歷年之中學課程標準一向並無單獨設置地球科學之課程。所以也就從無地球科學教科書之編製。在中學之一般「博物」或「地理」教科書中，或多或少會涵蓋一些地球科學概念，尤其是民國29 年修訂公布之中學課程標準，更是明白規定「博物」中應加教「礦物大意」。

民國 57 年以後，配合九年之國教，自然學科教材明訂應採九年一貫精神，而且國民中學教科書 全部改由國立編譯館統一編輯，並以精編精印為原則。

民國57 年1月公佈之「國民中學暫行課程標準」，在第一個三年輪廻完後（民國 57 學年度至 59 學年度），教育部乃於民國 60 年 9 月開始籌劃修訂國民中學課程標準，擬將暫行課程標準作全面修訂，於民國 61 年完成修訂並公佈。此階段之「博物」及「理化」已合併為「自然科學」，但其中並不涵蓋「地球科學」。

但從民國63 年 3 月起，國立台灣師範大學理學院開始接受教育部之委託，進行國民中學科學課程之實驗研究，該年四月組織「國民中學科學課程實驗研究委員會」，由理學院院長楊冠政博士為召集人，聘請各學科教授為研究委員，並分別成立物理、化學、生物及地球科學等工作小組。第一階段（63年4月至64年6月）的研究內容為比較分析國內外的國民中學科學課程，釐定研究實驗方針，編訂適合我國國情及教育宗旨之國民中學實驗課程綱要。依研究委員會決議，地球科學課程與生物課程並列為科學一，地球科學屬於初二課程，共計一學年，每週授課 2 小時。科學一後來演變為自然科學Ⅱ，地球科學仍然與生物合併為一科作課程設計。第二階段（64 年7 月至66年6 月）為新課程的編製及初步試用，而第三階段（66 年7 月至 69 年6 月）為新課程的試教期。所以從 66 年 9 月起，指定十所國中分三年逐年進行教學實驗，至 69 年 6 月第三階段的實驗教學才告結束。為使國中自然科學課程（包括理化、生物、地球科學）更能配合學生需要，69 年 9 月起特再改編原有實驗教材內容並指定七所國民中學，再進行實驗教學，以收宏效。

為使國民中小學課程前後銜接，教育部於64 年 8 月修訂公布國小課程標準，66 年 9 月起分六年逐年試用與修訂，67 年 9 月起分六年逐年全面實施國小新課程。至於

新修訂之國中課程標準，則預定71 學年公布（於民國72年正式公佈），73 學年起分三年逐年全面試用與修訂，75 學年起分三年逐年全面實施。依照上列進度，學習國小新課程之第一屆國小學生將於73年7月畢業，並於73 年9月進入國中學習國中新課程，如此國民中學「自然科學」課程卽可前後銜接。

民國72年7月公布之國民中學課程標準中，雖然「自然科學」仍爲一科，但此科之課程標準已分化成爲「生物」及「理化及地球科學」二類。

隨後在民國74年4月再次修訂的國民中學課程標準，「地球科學」已不再跟生物或理化合科，單獨成爲一個科目，安排在國中三年級的上、下學期上課，每週2小時。雖然課程標準上規定爲選修，但以行政命令明訂爲必選課程。

二、教材的評鑑

1. 教育部在76 學年度（民國77 年）曾進行教材內容調查研究，一般對於75 和76 學年度版之第九章天然災害和第十章天然資源反應不佳，認爲它們太煩瑣深奧。所以77 學年度版，將其簡化並合併成爲一章（卽第九章：天然資源與天然災害），故教材只剩11章。
2. 國立編譯館於民國78 年3月又針對地球科學教科書77 學年度版本進行教材內容調查分析研究，大多教師認爲應作修改的意見如表(一)所示。

表(一) 修改的意見一覽表

單元名稱	偏易部份			偏難部份		
	文字敍述稍簡	教材內容稍易	教材份量稍少	文字敍述稍繁	教材內容稍難	教材份量稍多
1-1 地球的形態		*				
1-2 地球的運轉					*	
5-2 礦物					*	
6-1 地層記錄地質事件	*					
7-5 水的循環	*					
8-2 空氣的流動 — 風					*	
8-3 天氣圖					*	
9-1 天然資源				*		*
9-2 天然災害				*		*
10-2 月球	*					
10-3 日食與月食	*					
11-2 太陽系	*					
11-3 恒星、銀河和宇宙	*					

3. 配合教育部「教材適切合理化」之要求，國中地球科學教科用書又再度作大幅度修訂，稱爲改編本。此改編本另增加了第12 章全球變遷，故國民中學地球科學教科書又再度恢復爲全書12章。
4. 針對79學年度之改編本，國立編譯館於民國79年12月4日委託台北市教師研習中心進行教材內容調查研究。民國八十年該館出版之該項研究報告內之結論如下：（詳見國立編譯館民國八十年出版之國民中學地球科學科改編本教科用書教材內容調查研究報告，共125頁）。

甲、學生部分：

1. 在教材內容十二章簡化成九個單元中，除岩石圈單元學生較不感興趣外，其餘的八個單元學生都「感興趣」。
2. 在教材內容困難度方面，學生認爲氣圈和天文兩個單元「偏難」，地球歷史和環境科學兩個單元「偏易」，其餘的五個單元「難易適中」。
3. 在習題分量方面，學生均認爲「適中」。
4. 在紀錄本的活動設計方面，學生認爲對學習「有幫助」。
5. 整體而言，學生對改編本教科書及活動紀錄本內容大致認爲「適切」。
6. 對學生背景資料與各項問題作卡方檢定結果，顯示地球科學之「學習興趣」是影響學生作答的主要因素。其次爲「上學期地科成績」：「男、女性別差異」僅和「板塊運動」單元之學習有顯著相關。

乙、教師部分：

1. 在教科書內容方面，教師對教科書內容在達成預期教學目標上認爲「適切」。
2. 在教材分量分配方面，教師認爲分量「適切」。
3. 在教材內容難易度方面，除6～4、9～3、10～1節爲「偏難」外，其他章節均「偏易」。
4. 對於文字敍述清楚程度方面，教師認爲「適切」。
5. 對於教科書中照片、圖、表及其說明與教材配合程度方面，除9～3、12～1、12～2節爲「不適切」外，其他部分認爲「適切」。
6. 對於習題設計與教材配合程度方面，教師覺得「適切」。
7. 對於活動紀錄本對學習有無幫助方面，除7～2、8～4、9～1、9~3、12～2等活動外，其他活動，教師認爲「有幫助」。
8. 整體而言，除少部分缺點宜作改善外，教師對改編本教科書及活動紀錄本內

容適切性方面大部分滿意。

9. 對教師各項背景資料與各項問題作卡方檢定結果，顯示教師對教材內容適切性看法和其背景資料無顯著相關。
10. 教師均未取得改編本教師手册，故手册部分之調查資料較不完整，因此較不易進行該手册適切性之研究。
11. 地球科學科授課時數，大部分老師認爲每週二節適當。

丙、結論與建議：

1. 教師與學生均認爲「氣圈」及「天文」內容較困難。可能因爲此部分所要表達之觀念較靈活，學生須具備較高之邏輯分析能力，方能理解，並需給予教師充裕的教課時數。故此部分教材內容系統化、簡易化實屬必要。
2. 「岩石圈」部分，學生認爲困難者多，教師卻認爲適切，可能因學生只接觸到生硬的課文內容，時間上又不能配合實物標本或進行野外考察以獲取實際經驗。
3. 「化石」及「我們的地球」部分，師生均認爲難度偏易，可能是教材內容稍少，可酌加內容，以滿足學生需求。
4. 教師與學生對習題分量的看法均感適中。
5. 在活動設計上，學生及老師均認爲大部分活動有助於學習，但教師指出少數活動仍應有所改進。

參、展　望

最新的高級中學地球科學課程與授課時數已做了改變，即高一的基礎地球科學課程從舊有的每週3小時減爲2小時，仍然只上一學期。不過高二爲學生的試探階段，將設有物質科學地球科學篇的選修課程，於高二上、下學期均上課且每週上課2小時。此外，高三也設有地球科學㈠及㈡的選修課程，分別在高三上、下學期上課，每週上課3～4小時。

由於將來高二修習文法科的學生已硬性規定不能像以往免修自然科學，所以他(她)們必須在生命科學、物質科學（下又分物理篇、化學篇及地球科學篇）等四類中，至少選取一門課。再加上最新的大學推薦甄選之學科能力測驗，在自然科學考題中已涵蓋有地球科學類的試題，所以基於考試領導教學的原則，展望高中的地球科學教學，形勢顯然會比以往好。

至於最新的國民中學地球科學課程與授課時數也同樣作了修訂。國三的地球科學課

程，必修部分只剩1節課，另闢選修部分1節課。只要高中聯考自然科考卷上的地球科學題目，仍能維持佔有140分之$\frac{1}{7}$，即20分，同樣基於考試領導教學的理念，展望國中的地球科學教學，應仍會維持老樣子。

其實考不考試應該是次要問題。首先應該檢討的是新輪迴的中等學校地球科學課程及教材內容應如何改頭換面，以煥然一新的姿態，在選修的自由市場中能夠吸引大批的中學生選讀，我認爲這才是實施中等學校地球科學新課程最迫切的問題。

★

教育部八十三學年度高級中學數學及自然學科資賦優異學生甄試保送初訊

編輯室

八十三學年度高級中學數學及自然學科資賦優異學生甄試保送共有221位申請，申請人數分區統計結果如下表：

	數學	物理	化學	生物	地球科學	合計
北區	37	28	18	44	11	138
中區	4	13	9	15	0	41
南區	9	10	9	10	4	42
合計	50	51	36	69	15	221

經初步審查結果，共計174位通過遴選，可參加學科性向和智力測驗等進一步甄試。其中數學科39位，物理科45位，化學科31位，生物科51位，地球科學科8位。

★

對畢氏三元數公式的一番探索

黃敏晃
國立臺灣大學數學系

§0. 楔　子

過年期間翻閱科學月刊1995年1月號，讀到同事蔡聰明先生的“談費瑪最後定理”一文，其中有關畢氏三元數的那段文字，引起了我的注意。原文如下（引文略作了一些更動，以配合下文的敍寫）：

“滿足方程式(1)的任何一組正整數解答（x，y，z）就叫做一組畢氏三元數，例如（3,4,5），（5,12,13），（119,120,169）都是畢氏三元數。

$$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

畢氏三元數不但存在，而且有無窮多組。更神奇的是，它們可以用公式表達出來。我們將(1)式的答案列於下：

1. 畢氏公式

$$x=2n+1\ ,\ y=2n^2+2n\ ,\ z=2n^2+2n+1 \quad \cdots\cdots(2)$$

2. 柏拉圖公式

$$x=2m,\ y=m^2-1\ ,\ z=m^2+1 \quad \cdots\cdots(3)$$

在(2)與(3)兩式中，n與m皆爲自然數。不過，兩式都沒有窮盡所有之解答。

3. 歐氏的完全解答公式：

$$x=\ell(m^2-n^2)\ ,\ y=\ell(2mn)\ ,\ z=\ell(m^2+n^2) \quad \cdots\cdots(4)$$

其中m，n，ℓ皆爲自然數，且$m>n$。(4)式窮盡了(1)式所有的解答。”

其實，這段文字並不稀奇，在很多本初等整數論的書中可以看到，我在大學時代就曾看過。但當時年輕，學習的態度太過急切，只要是正確的知識就毫不質疑全盤接受，並不問“爲什麼這樣？”也不追究“爲什麼會這樣？”現在年事漸長，而且過年無事，看到這段文字，比較有閒情來探索下列問題。

問題1　畢氏公式和柏氏公式不能窮盡，有例子嗎？

問題2　爲什麼歐氏公式能窮盡(1)式的所有解答？這個公式又是怎樣出來的？

§ 1. 公式的初步分析

問題 1 的解答很容易，蔡文中已給了例子（119,120,169）。 爲什麼這個例子是畢氏公式和柏氏公式的反例呢？因爲滿足畢氏公式的畢氏三元數（x_1, y_1, z_1）中，$z_1 = 2n^2+2n+1 = (2n^2+2n)+1 = y_1+1$ ；而滿足柏氏公式的畢氏三元數（x_2, y_2, z_2）中， $z_2 = m^2+1 = (m^2-1)+2 = y_2+2$ 。（119,120,169） 顯然並沒有上述關係。

事實上，在上面所展示的三個公式中，歐氏公式和另兩公式不同，因爲它把倍數解也列進去了，這是很大的改進。因爲

事實 1　(1)式 $x^2+y^2=z^2$ 是文字 x ，y ，z 的齊次方程式，所以(1)式的任意一組解（α, β, γ）的倍數（$t\alpha, t\beta, t\gamma$），也是(1)式的解。

這裡所說的倍數，其實是向量意味下的倍數 $t(\alpha, \beta, \gamma) = (t\alpha, t\beta, t\gamma)$ ，本事實的證明只要將（$t\alpha, t\beta, t\gamma$）代入即可：設 t 爲參數，則

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \Rightarrow (t\alpha)^2+(t\beta^2) = t^2(\alpha^2+\beta^2) = t^2\gamma^2 = (t\gamma)^2$$

由於畢氏公式和柏氏公式並不是齊次式，所以由它們所產生的解，其倍數並不滿足原來的公式。

例 1　1° 在畢氏公式中，令 $n=1$ 得到 (3,4,5)，其 2 倍 (6,8,10) 不滿足畢氏公式；$6 \neq 10-1$ ，$8 \neq 10-1$ 。

2° 在柏氏公式中令 $m=4$ 代入得 (8,15,17)，其 2 倍 (16,30,34) 不滿足柏氏公式：$16 \neq 34-2$ ，$30 \neq 34-2$ 。

由此看來，畢氏公式和柏氏公式之不能窮盡，反例並不假外求，其公式之不周延顯而易見。反觀歐氏公式，放棄畢氏和柏氏只用一個自變數的方式，改採兩個自變數 m 和 n ，並將 x ，y 與 z 表達成 m 和 n 的二次齊公式，使得另外乘上一個倍數參數 ℓ 後也滿足公式。兩者相較，優劣立見。

當然，以上的分析，並不足以證明歐氏公式能窮盡(1)式所有的解，只能說明歐氏改進了畢氏和柏氏的缺點而已。怎樣才能說明歐氏公式能夠窮盡呢？恐怕需要作進一步的探索來加以澄清。

首先，歐氏公式既然已把倍數考慮進來，我們只要檢驗解中的三數互質之原解（primitive solutions）就可以了。例如，（3,4,5），（5,12,13），（8,15,17），（119,120,169）就是(1)式的原解，而（6,8,10）= 2（3,4,5），（25,60,65）=

5(5,12,13),(32,60,68) = 4(8,15,17),(357,360,507)=3(119,120,169)則不是(1)的原解。在這種考慮下，我們也可以將歐氏公式減少一個參數，簡化成

歐氏(簡化)公式

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2 \quad \cdots\cdots(5)$$

其中$m > n$都是自然數。

於是我們原先考慮的問題2，變成了如下的

問題3　(5)式能窮盡(1)式的所有原解嗎？

§2. 一點啓示

同事曹亮吉先生最近寫了一本書，書名好像叫做數學思維與解題。尚未出版，我也還未見到手寫的稿本，但他去年在師大數學系作過一次演講，內容非常精彩。他有次和我閒聊的時候，提到其中一段的內容，是利用國中生都熟知的平方公式，窮盡畢氏三元數的解。他的這段話，此時當然給我很大的啓示：

畢氏三元數(α,β,γ)中，自然有$\gamma > \alpha$，$\gamma > \beta$。若令α爲自變數，而$\gamma - \alpha = t$爲參數，則β和γ都可以表達成α和t如下：

$$\gamma = \alpha + t,\ \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = \sqrt{2\alpha t + t^2}。$$

若我們令$t = 1, 2, \cdots\cdots$　則這樣當然能窮盡所有的解。既然有此領悟，自然立刻進行實驗。所謂進行實驗，當然不可能將$t = 1, 2, \cdots\cdots$　等無窮多種狀況都加以窮盡。這樣做的原因是希望能對各種t進行歸類，使我們能做一般性的推論。我對100以內的t所做的實驗結果，使我歸納出如下結果：

事實2　設$(\alpha,\beta,\alpha+t)$爲畢氏三元數，$t \leqslant 100$，則

1°　$(\alpha,\beta,\alpha+t)$爲(1)式原解的情形是

$t = 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2$，或者

$t = 2\times1^2, 2\times2^2, 2\times3^2, 2\times4^2, 2\times5^2, 2\times6^2, 2\times7^2$。

2°　在其他情形下$(\alpha,\beta,\alpha+t)$都不是(1)式的原解。

讓我們舉幾個例子說明。事實上，同類的t，推論的過程都差不多。所以，不在下面的例子中，而讀者又有興趣時，不妨從各類型的t中各選一個，自行實驗看看。這樣也可以在讀下文時更有感覺。

例2　設$t = 8 = 2\times2^2$，而$(\alpha, \sqrt{16\alpha+64}, \alpha+8)$爲一個畢氏三元數。因$\sqrt{16\alpha+64} = 4\sqrt{\alpha+4}$，故$\alpha+4$爲平方數，其前幾個案例如下：

$x = 5$ 時，$\sqrt{\alpha+4} = 3$，得到 $(5, 4\times3, 5+8) = (5, 12, 13)$

$x = 12$ 時，$\sqrt{\alpha+4} = 4$，得到 $(12, 4\times4, 12+8) = (12, 16, 20) = 4(3, 4, 5)$

$x = 21$ 時，$\sqrt{\alpha+4} = 5$，得到 $(21, 4\times5, 21+8) = (21, 20, 29)$

$x = 32$ 時，$\sqrt{\alpha+4} = 6$，得到 $(32, 4\times6, 32+8) = (32, 24, 40) = 8(4, 3, 5)$

$x = 45$ 時，$\sqrt{\alpha+4} = 7$，得到 $(45, 4\times7, 45+8) = (45, 28, 53)$

其中 $(12,16,20)$ 和 $(32,24,40)$ 都不是原解，而 $(5,12,13)$ 則可由 $t=1$ 時得出。上面得到的新原解只有 $(21,20,29)$ 和 $(45,28,53)$。 當然，繼續做下去，還可以得到許多新的原解。

例3　設 $t = 9 = 3^2$，而 $(\alpha, \sqrt{18\alpha+81}, \alpha+9)$ 爲一畢氏三元數。因 $\sqrt{18\alpha+81} = 3\sqrt{2\alpha+9}$，故 $2\alpha+9$ 爲平方數，其前幾個案例如下：

$x = 8$ 時，得 $(8,15,17)$；可由 $t = 2$ 時得到；

$x = 20$ 時，得 $(20,21,29)$；可由 $t = 8$ 時得到；

$x = 36$ 時，得 $(36,27,45) = 9(4,3,5)$ 不是原解；

$x = 56$ 時，得 $(56,33,65)$ 是個新的原解；

$x = 80$ 時，得 $(80,39,89)$ 也是個新的原解。

同理，繼續做下去，應該還可以得到許多新的原解。

例4　當 t 不是某奇數的平方，或某平方數的 2 倍時，譬如說 $t=4=2^2$，或 $t=5$，或 $t = 12$ 時，$(\alpha, \sqrt{2\alpha t + t^2}, \alpha+t)$ 都不是(1)的原解：

1° $t = 4 = 2^2$ 的情形。若 $(\alpha, \sqrt{8\alpha+16}, \alpha+4)$ 爲畢氏三元數，則因爲 $\sqrt{8\alpha+16} = 2\sqrt{2(\alpha+2)}$ 爲自然數，$\alpha+2$ 一定是 2 的倍數（如此 2 才能開方出來），即 $\alpha+2 = 2b^2 \Rightarrow \alpha = 2d$，但如此則

$$(\alpha, \sqrt{8\alpha+16}\ \alpha+4) = 2(d, b, d+2)$$

故 $(\alpha, \sqrt{8\alpha+16}, \alpha+4)$ 不是(1)式的原解。

2° $t = 5$ 的情形。若 $(\alpha, \sqrt{10\alpha+25}, \alpha+5)$ 爲畢氏三元數，則因 $\sqrt{10\alpha+25} = \sqrt{5(2\alpha+5)}$ 爲自然數，故 $2\alpha+5$ 一定得爲 5 的倍數（5 才能開方出來），即 $2\alpha+5 = 5b^2 \Rightarrow 2\alpha = 5(b^2-1)$，但 2 與 5 互質，所以 α 必然是 5 的倍數，即 $\alpha = 5d$，但此時

$$(\alpha, \sqrt{10\alpha+25}, \alpha+5) = 5(d, b, d+1)$$

故 $(\alpha, \sqrt{10\alpha+25}, \alpha+5)$ 不是(1)式之原解。

3° $t=12$ 的情形。若 $(\alpha, \sqrt{24\alpha+144}, \alpha+12)$ 爲畢氏三元數，則因 $\sqrt{24\alpha+144}=2\sqrt{6(\alpha+6)}$ 爲自然數，故 $\alpha+6$ 一定得爲 6 之倍數（如此 6 才能開方出來），即 $\alpha+6=6b^2 \Rightarrow \alpha=6(b^2-1)$，故

$$(\alpha, \sqrt{24\alpha+144}, \alpha+12)=6(b^2-1, 2b, b^2+1)$$

不再是(1)式的原解。

§ 3. 結果的一般化

以上我們對 100 以內的 t 做了個別的檢討，也歸納出了下列比較一般性的猜測：

猜測　設 $(\alpha, \beta, \alpha+t)$ 爲畢氏三元數，α, β 與 t 爲自然數，則

1° 若 $t=(2q+1)^2$，或 $t=2n^2$ 時，$(\alpha, \beta, \alpha+t)$ 可能是(1)式的原解；

2° 若 t 不爲上述的情形時，$(\alpha, \beta, \alpha+t)$ 一定不是(1)式的原解。

要證明這樣猜測時，我們首先注意到 2° 可以仿照例 4，分成幾個狀況加以證明，而且證明方式也和例 4 的特例非常相像。

事實 3　設 $t=(2n)^2$，而 $(\alpha, \sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}, \alpha+(2n)^2)$ 爲畢氏三元數，則此解不是(1)式的原解。

證明　因爲 $\sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}=2n\sqrt{2(\alpha+2n^2)}$ 是個自然數，因此 $\alpha+2n^2$ 必需爲 2 的倍數，即 $\alpha+2n^2=2b^2 \Rightarrow \alpha=2(b^2-n^2)$

$\Rightarrow (\alpha, \sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}, \alpha+(2n)^2)=2(b^2-n^2, 2nb^2, b^2+n^2)$

所以，$(\alpha, \sqrt{2\alpha(2n)^2+(2n)^4}, \alpha+(2n)^2)$ 不是(1)式的原解。

事實 4　設 $t=ar^2$，其中 a 不再含有大於 1 的平方因數，而且存在一個奇數的質數 p，使得 $a=pb$（因此 p 與 b 互質），則 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)$ 不是(1)式的原解。

證明　$\sqrt{2\alpha t+t^2}=\sqrt{2ar^2\alpha+a^2r^4}=r\sqrt{a(2\alpha+ar^2)}$

$=r\sqrt{pb(2\alpha+pbr^2)}$ 是個自然數，故 $b(2\alpha+pbr^2)$ 是 p 的倍數（如此 p 才能開方出來）。但 b 與 p 互質，因此 $2\alpha+pbr^2$ 應該是 p 的倍數，即 $2\alpha+pbr^2=pd \Rightarrow 2\alpha=p(d-br^2)$，且 2 與 p 互質 $\Rightarrow \alpha=pc$。但如此

則 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)=p(c, \sqrt{bd}, c+br^2)$

即 $(\alpha, \sqrt{2\alpha t+t^2}, \alpha+t)$ 不再是個(1)式的原解。

上面，我們成功地將產生原解的狀況局限於 $t=(2q+1)^2$ 和 $t=2n^2$ 的兩種

狀況。但這兩種狀況爲什麼可以寫成歐氏簡化公式？但我暫時並不想急於對上述兩種狀況進行分析，只讓我的思維處於散漫游離的散鬆狀態。

在上述的探索過程中，我觀察到一個粗淺的次要現象，即若畢氏三元數 (x, y, z) 爲一原解，則此三數中一定有 2 個奇數，而只有一個偶數。我之所以會用“粗淺次要”的形容詞，原因是奇偶數其實只是表面現象。如果將“偶數”改成“2 的倍數”，這個現象就能一般化如下了：

事實 5　設 p 爲一個質數，則畢氏三元數 (x, y, z) 及(1)式原解的充份必要條件是，此三數中只能有一數是 p 的倍數。換句話說，x, y, z 三數是兩兩互質的。

證明　設 $x = pa$, $y = pb$ ，則 $z^2 = x^2 + y^2 = p^2(a^2 + b^2)$。由於 p 是一個質數，所以，若 z 不是 p 的倍數時，z^2 也不可能是 p 的倍數。 因此，z 是 p 的倍數，即 $z = pc$。如此則 $\therefore (x, y, z) = p(a, b, c)$ 不是(1)式的原解。

若 $x = pa$, $z = pc$ ，則 $y^2 = z^2 - x^2 = p^2(c^2 - a^2)$。此時可作如上述的平行推論。若 $y = pb$, $z = pc$ 時，也同理可證。

§ 4. 一些聯想

上面我之會觀察到爲原解的畢氏三元數中奇數和偶數的個數，除了奇數，偶數很容易被注意到之外，另外的原因是我湊巧知道奇數有一些可資利用的模式，譬如說，

$$3 = 2^2 - 1^2 ,\ 5 = 3^2 - 2^2 ,\ 7 = 4^2 - 3^2 ,\ \cdots\cdots$$

這些模式剛好與歐氏公式中的 $x = m^2 - n^2$ 型式相合。旣然爲原解的畢氏三元數中，較小的兩數中的一數是個奇數，不妨令爲 x。由此我們可以問下面的兩個問題。

問題 4　設爲原解的畢氏三元數 (x, y, z) 中，x 爲最小的奇數。若 x 爲已知，是否此畢氏三元數就由歐氏公式唯一地確定呢？

問題 5　爲原解的畢氏三元數 (x, y, z) 中，最大的數 z 可以是個偶數嗎？

問題 5 很容易回答。設 $x = 2\alpha + 1$，y 若爲偶數，則 x^2 爲奇數，y^2 爲偶數，所以 $z^2 = x^2 + y^2$ 爲奇數，故 z 也爲奇數。若 $x = 2\alpha + 1$, $y = 2\beta + 1$ ，則 x^2 和 y^2 也都爲奇數，$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ 爲偶數，設 $z = 2r$ ，則代入如下，就可以看到矛盾了。

$$x^2 + y^2 = z^2 = (2r)^2 = 4r^2 \quad (\text{爲 4 的倍數})$$

$$\|$$

$$4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \cdots\cdots (\text{不爲 4 的倍數})$$

由上述推論，知道在一個爲原解的畢氏三元數 (x, y, z) 中，z 一定是個奇數，若 x 爲

奇數，則 y 一定是個偶數。

問題4的解答也不困難，只要找到一個反例就可以了。但在下面，我們多給一個案例，並用歐氏公式，產生相應的畢氏三元數。希望能從這些案例中，看到一些可以一般化的規律。

例5　1° $15=8^2-7^2$，$2\times8\times7=112$，$8^2+7^2=113$，得 $(15,112,113)$;

$15=4^2-1^2$，$2\times4\times1=8$，$4^2+1^2=17$，得 $(15,8,17)$。

2° $3\times5\times7=105=1\times105=3\times35=5\times21=7\times15$

$105=1\times105=(\frac{105+1}{2})^2-(\frac{105-1}{2})^2=53^2-52^2$，得

$(105,2\times53\times52,53^2+52^2)=(105,5512,5513)$

$105=3\times35=(\frac{35+3}{2})^2-(\frac{35-3}{2})^2=19^2-16^2$，得

$(105,2\times19\times16,19^2+16^2)=(105,608,617)$

$105=5\times21=(\frac{21+5}{2})^2-(\frac{21-5}{2})^2=13^2-8^2$，得

$(105,2\times13\times8,13^2+8^2)=(105,208,233)$

$105=7\times15=(\frac{15+7}{2})^2-(\frac{15-7}{2})^2=11^2-4^2$ 得

$(105,2\times11\times4,11^2+4^2)=(105,88,137)$

從上例中，我們看到奇數 x 只要能分解成兩數的乘積（包含 $x=1\cdot x$ 在內），就可以寫成兩平方差的型式：設 $x=(2p+1)(2q+1)$，$p\geqslant q$，則

$$x=[\frac{(2p+1)+(2q+1)}{2}]^2-[\frac{(2p+1)-(2q+1)}{2}]^2$$

而這樣的資訊正是我們需要的。下面，我將這個知識和上述兩類產生(1)式原解的情況 $t=(2r+1)^2$ 和 $t=2n^2$ 結合在一起，進行系統性的分析。

§ 5. 進一步的分析

設 $(\alpha,\sqrt{2\alpha t+t^2},\alpha+t)$ 是(1)式的原解。先討論 $t=2n^2$ 的情形。事實上，我對 $t=2\times1^2=2$，$t=2\times2^2=8$，$t=2\times3^2=18$，$t=2\times4^2=32$，$t=2\times5^2=50$，$t=2\times6^2=72$，$t=2\times7^2=98$ 都作了分析。但這些情形的規律非常強，所

以我們只要看 $t=2\times1^2=2$ 和 $t=2\times3^2=18$ 的情形就可見其一般的狀況了。我們除了注意到為原解的畢氏三元數中最小奇數寫成平方差的規律外，同時利用歐氏公式求出該解，以便得到其一般規律。

例6　$t=2\times1^2=2$ 的情形。$\sqrt{2\alpha t+t^2}=\sqrt{4\alpha+4}=2\sqrt{\alpha+1^2}$ 為自然數，故最前面的幾個 α 值為 $\alpha=3$，$\alpha=15$，$\alpha=35$，$\alpha=63$。這些案例如下：

$\alpha=3$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=2\times2=4$，$\alpha+t=3+2=5$，得 $(3,4,5)$

　此時 $3=1\times3=(2-1)(2+1)=2^2-1^2$，$4=2\times2\times1$，$5=2^2+1^2$

$\alpha=15$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=2\times4=8$，$\alpha+t=15+2=17$，得 $(15,8,17)$

　此時 $15=3\times5=(4-1)(4+1)=4^2-1^2$，$8=2\times4\times1$，$17=4^2+1^2$

$\alpha=35$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=2\times6=12$，$\alpha+t=35+2$，得 $(35,12,37)$

　此時 $35=5\times7=(6-1)(6+1)=6^2-1^2$，$12=2\times6\times1$，$37=6^2+1^2$

$\alpha=63$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=2\times8=16$，$\alpha+t=63+2=65$，得 $(63,16,65)$

　此時 $63=7\times9=(8-1)(8-1)=8^2-1^2$，$16=2\times8\times1$，$65=8^2+1^2$

一般而言，若令 $m=\sqrt{\alpha+1}$，則 $\alpha=m^2-1^2$，$\beta=\sqrt{2\alpha t+t^2}=2\sqrt{\alpha+1^2}=2m$，

　$\gamma=\alpha+t=(m^2-1)+2=m^2+1$，即其一般型式為如下的柏氏公式

$$(m^2-1,\ 2m,\ m^2+1)$$

例7　$t=2\times3^2=18$ 的情形。$\sqrt{2\alpha t+t^2}=\sqrt{2\times18\alpha+18^2}=6\sqrt{\alpha+3^2}$ 為自然數，其最前面的 α 值為 $\alpha=7,27,55$ 和 91，案例分析如下：

$\alpha=7$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=6\times4=24$，$\alpha+t=7+18=25$，得 $(7,24,25)$

　此時 $7=1\times7=(4-3)(4+3)=4^2-3^2$，$24=2\times4\times3$，$25=4^2+3^2$

$\alpha=27$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=6\times6=36$，$\alpha+t=27+18=45$，得 $(27,36,45)$

　此時 $27=3\times9=(6-3)(6+3)=6^2-3^2$，$36=2\times6\times3$，$45=6^2+3^2$

$\alpha=55$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=6\times8=48$，$\alpha+t=55+18=73$，得 $(55,48,73)$

　此時 $55=5\times11=(8-3)(8+3)=8^2-3^2$，$48=2\times8\times3$，$73=8^2+3^2$

$\alpha=91$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=6\times10=60$，$\alpha+t=91+18=109$，得 $(91,60,109)$

　此時 $91=7\times13=(10-3)(10+3)=10^2-3^2$，$60=2\times10\times3$，$109=10^2+3^2$

一般而言，若令 $m=\sqrt{\alpha+3^2}$，則 $\alpha=m^2-3^2$，$\beta=\sqrt{2\alpha t+t^2}=6\sqrt{\alpha+3^2}=6m$，

　$\gamma=\alpha+t=(m^2-3^2)+2(3^2)=m^2+3^2$，即其一般型為

$$(m^2-3^2,\ 6m,\ m^2+3^2)$$

　由這兩個例子，我們不難推廣到一般的情形，如下：

設 $t=2n^2$，而 $(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\sqrt{2\alpha t+t^2},\alpha+t)$ 爲畢氏三元數，則 $\sqrt{2\alpha t+t^2}=\sqrt{4n^2\alpha+4n^4}=2n\sqrt{\alpha+n^2}$ 爲自然數。若令 $m=\sqrt{\alpha+n^2}$，則 $\alpha=m^2-n^2$，$\beta=\sqrt{2\alpha t+t^2}=2n\sqrt{\alpha+n^2}=2nm$，而 $\gamma=\alpha+t=(m^2-n^2)+2n^2=m^2+n^2$，換句話說，其一般型就是如下的歐氏之簡化公式

$$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$$

§ 6. 另一類的例子

下面分析 $t=(2q+1)^2$ 的情形，我雖然分析了 $t=1^2,3^2,5^2,7^2$ 和 9^2 的各種情形，但如同上述的，規律性很強，只要舉2個案例即可看到其一般狀況。

例8　$t=5^2$ 的情形。$\sqrt{2\alpha t+t^2}=\sqrt{2\times5^2\alpha+5^4}=5\sqrt{2\alpha+5^2}$ 爲自然數，其最小的幾個 α 值爲 $\alpha=12,28,48$ 和 72。這些 α 不是奇數，但沒關係，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=5\sqrt{2\alpha+5^2}$ 一定是個奇數。案例分析如下：

$\alpha=12$ 時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=5\times7=35$，$12+5^2=37$，得 $(12,35,37)$

此時 $35=5\times7=(6-1)(6+1)=6^2-1^2$，$12=2\times6\times1$，$37=6^2+1^2$

$\alpha=28$ 時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=5\times9=45$，$28+5^2=53$，得 $(28,45,53)$

此時 $45=5\times9=(7-2)(7+2)=7^2-2^2$，$28=2\times7\times2$，$53=7^2+2^2$

$\alpha=48$ 時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=5\times11=55$，$48+5^2=73$，得 $(48,55,73)$

此時 $55=5\times11=(8-3)(8+3)=8^2-3^2$，$48=2\times8\times3$，$73=8^2+3^2$

$\alpha=72$ 時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=5\times13=65$，$72+5^2=97$，得 $(72,65,97)$

此時 $65=5\times13=(9-4)(9+4)=9^2-4^2$，$72=2\times9\times4$，$97=9^2+4^2$

一般而言，$\sqrt{2\alpha+5^2}$ 是個奇數。因爲若 $\sqrt{2\alpha+5^2}=2k$，則 $2\alpha+5^2=4k^2$，得到奇數等於偶數的矛盾。所以不妨令 $\sqrt{2\alpha+5^2}=2\ell+1$，等號兩邊平方得 $2\alpha+5^2=4\ell^2+4\ell+1$，$\alpha=2(\ell^2+\ell-6)=2(\ell+3)(\ell-2)$。令 $n=\ell-2$，則 $\alpha=2(\ell+3)(\ell-2)=2(n+5)n=2n(n+5)$。此時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=5\sqrt{2\alpha+5^2}=5(2\ell+1)=5(2n+4+1)=10n+25=(n+5)^2-n^2$，而 $\alpha+t=2n(n+5)+25=(n^2+10n+25)+n^2=(n+5)^2+n^2$。故其一般型式爲

$$((n+5)^2-n^2,\ 2n(n+5),\ (n+5)^2+n^2)$$

例9　$t=7^2$ 的情形。$\sqrt{2\alpha t+t^2}=\sqrt{2\times7^2\alpha+7^4}=7\sqrt{2\alpha+7^2}$ 爲自然數，其最小的幾個 α 值爲 $\alpha=16,36,60$ 和 88。案例分析如下：

$\alpha=16$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 9=63$，$16+7^2=65$，得$(16,63,65)$

此時$63=7\times 9=(8-1)(8+1)=8^2-1^2$，$16=2\times 8\times 1$，$65=8^2+1^2$

$\alpha=36$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 11=77$，$36+7^2=85$，得$(36,77,85)$

此時$77=7\times 11=(9-2)(9+2)=9^2-2^2$，$36=2\times 9\times 2$，$85=9^2+2^2$

$\alpha=60$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 13=91$，$60+7^2=109$，得$(60,91,109)$

此時$91=7\times 13=(10-3)(10+3)=10^2-3^2$，$60=2\times 10\times 3$，$109=10^2+3^2$

$\alpha=88$時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\times 15=105$，$88+7^2=137$，得$(88,105,137)$

此時$105=7\times 15=(11-4)(11+4)=11^2-4^2$，$88=2\times 11\times 4$，$137=11^2+4^2$

一般而言，$\sqrt{2\alpha+7^2}$為奇數，理由如前例。故不妨令$\sqrt{2\alpha+7^2}=2\ell+1$，

兩邊平方得$2\alpha+7^2=4\ell^2+4\ell+1\Rightarrow\alpha=2(\ell^2+\ell-12)=2(\ell-3)(\ell+4)$。

令$\ell-3=n$，則$\alpha=2(\ell-3)(\ell+4)=2n(n+7)$。此時，$\sqrt{2\alpha t+t^2}=7\sqrt{2\alpha+7^2}=7(2\ell+1)=7(2n+7)=2\times 7n+7^2=(n+7)^2-n^2$，而且$\alpha+t=2n(n+7)+7^2=(n^2+2\times 7n+7^2)+n^2=(n+7)^2+n^2$。故其一般型式為

$$((n+7)^2-n^2,\ 2n(n+7),\ (n+7)^2+n^2)$$

由上面的兩個例子，我們就可以推到一般情形了。設$t=(2q+1)^2$；而$(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\sqrt{2\alpha t+t^2},\alpha+t)$為畢氏三元數，則$\sqrt{2\alpha t+t^2}=(2q+1)\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}$為自然數，而且$\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}$為一個奇數。不妨令$\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}=2\ell+1$，則有$2\alpha=4\ell^2+4\ell+1-(4q^2+4q+1)$或者$\alpha=2[(\ell^2-q^2)+(\ell-q)]=2(\ell-q)(\ell+q+1)$。令$\ell-q=n$作為自變參數，則$\alpha=2n(n+2q+1)$。此時

$$\begin{aligned}\sqrt{2\alpha t+t^2}&=(2q+1)\sqrt{2\alpha+(2q+1)^2}=(2q+1)(2\ell+1)=(2q+1)(2n+2q+1)\\&=2n(2q+1)+(2q+1)^2=[n+(2q+1)]^2-n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha+t&=2n(n+2q+1)+(2q+1)^2=2n^2+2n(2q+1)+(2q+1)^2\\&=[n+(2q+1)]^2+n^2\end{aligned}$$

所以，其一般型式為

$$([n+(2q+1)]^2-n^2,\ 2n(n+2q+1),\ [n+(2q+1)]^2+n^2)$$

若令$n+(2q+1)=m$，則其型式改變成歐氏的簡化公式

$$(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$$

到此為止，我們證明了，若$(\alpha,\sqrt{2\alpha t+t^2},\alpha+t)$為一個畢氏三元數，而且是

(1)式的原解，則它就可以寫成歐氏簡化公式的樣子。這個結論，算是回答了歐氏公式能窮盡(1)式之解的問題。至於歐氏公式的由來，上面的導引過程能不能對此問題作合理呢？這我就不太能判斷了。

§7. 結　語

這是我在民國 84 年初過農曆年時的某天晚上，實在是閒極無聊（租來的錄影帶太難看），只好拿這樣的數學題目來自尋開心。而這樣的解題痕跡，似乎值得紀念，所以寫成此文，希望讀者不以粗淺見棄。

寫成此文時，有一些不安心。因爲最大的解題關鍵是曹亮吉先生的一句話，所以在這裡特別提出來說明。至於曹亮吉未出版的書上，跟這段有關的部分會不會太過雷同呢？（如此，本文就算是抄襲的了），我想應該不會才對。爲什麼呢？因爲我知道他寫文章的風格，喜歡簡潔輕巧不像我的文章這樣囉嗦嘮叨。

這裡稍爲對我的寫作風格作一些交待。一般在寫學術論文時，當然應該寫的簡潔，儘量減少不必要的廢話。如此，本文在進入§2.時，就應該直接將畢氏三元數（α，$\sqrt{2\alpha t+t^2}$，$\alpha+t$）就 $t=ar^2$（其中 a 不含大於1的平方因數）分成下列三類來處理：

1° $a=1$，又分成 $r=2q+1$（即§6）和 $r=2p$（即§3的事實3，其最後的式子又是歐氏公式）。

2° $a=2$（即§5的情形）。

3° $a>2$（即§3的事實4）。

並不需要談到(1)式的原解。但本文是寫給中學數學老師和中學生看的，我就寧願慢慢的從許多實際的例子出發，歸納出一般結果，再加一些證明。這樣的文章是不嚴謹的，但可以流露出我在思考問題時的一些想法和嘗試（常是錯誤的）。有些讀者對這些比對文章裡所呈現的知識更有興趣些。我想，希望那類讀者喜歡閱讀你的文章的權衡與取捨，就是構成每個作者寫作風格的重要關鍵吧！

★

臺北市八十三學年度
高級中學數學及自然學科競賽
數學科複賽試題及參考解答

國立臺灣師範大學數學系

壹、一、台北市複賽試題(一)

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分爲四十九分。
   第一題十二分、第二題十二分、第三題十二分、第四題十三分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題一　若 $p>5$ 且 p、$p+2$、$p+6$ 與 $p+8$ 都是質數，試證：$p+4$ 是 15 的倍數。

問題二　考慮與 Y 軸及圓 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 都相切的所有公切圓，試求這些公切圓的圓心所成圖形的方程式，並就半徑 r 的值討論這方程式所表示的圖形。

問題三　在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分別爲 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的點，且都不是頂點。過 D 分別作 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 的平行線，各交 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 於 G 與 H。設 $\overline{GH}$ 分別交 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 於 R 與 S，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 P。若

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{BE}}=\lambda,\qquad \frac{\overline{PF}}{\overline{CF}}=\mu,$$

試證：

(1)　$\lambda+\mu<1$。

(2)　$\triangle PRS$ 與 $\triangle DRS$ 的面積之比與 D 的位置無關，並求其比值。

問題四　設 $<a_k>$ 爲一數列，且每個 a_k 都滿足 $a_k\geq k$。試證：對每個正整數 $n>1$，恆有

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}>\frac{n}{2}\sqrt[n]{n!}\ 。$$

二、台北市複賽試題(二)

注意事項：

1. 本試卷共七題，滿分爲二十一分，每題三分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

問題一　若 $x>0$，$y>0$ 且 $x+y=24$，則 $\log_4 x+\log_2 y$ 的最大值爲 ________ 。

問題二　$\cos\frac{\pi}{31}\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}$ 的值等於 ________ 。

問題三　從 1,2,3,4,5,6 中選四個相異數字做爲八位數 ****1776 的首四位數字，則所得的八位數中可被 176 整除者共有幾個？________ 。

問題四　若 n 爲正整數且 $n>1$，則 $4n$ 位整數 $99\cdots9799\cdots9700\cdots0400\cdots04$ 的正平方根爲 ________ ，其中的 $99\cdots9$ 與 $00\cdots0$ 都各有 $n-1$ 位。

問題五　若正整數 m 與 n 滿足 $2(3^m-2)=n(n-5)$，則所有的解 (m,n) 爲 ____ 。

問題六　若 n 爲正整數，則二項式係數 C_1^{2n}, C_3^{2n}, $\cdots$, C_{2n-1}^{2n} 等 n 個整數的最大公因數爲 ________ 。

問題七　在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分別爲 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的點，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 L，$\overline{CF}$ 與 $\overline{AD}$ 交於 M，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 N。若 $\triangle ABC$ 的面積是 $\triangle LMN$ 面積的兩倍，且滿足

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\lambda,$$

則 λ 的值等於 ________ 。

《 參考解答 》

壹、一、台北市複賽試題(一)

問題一　因爲 p、$p+1$ 與 $p+2$ 是三個連續整數，所以，三數中必有一個是3的倍數。因爲 p 與 $p+2$ 是大於5的質數，所以，$p+1$ 是3的倍數。於是，$p+4$ 是3的倍數。

其次，$p+2$、$p+3$、$p+4$、$p+5$ 與 $p+6$ 是五個連續整數，所以，五數中必

有一個是 5 的倍數。因爲 $p+2$ 與 $p+6$ 是大於 5 的質數，所以，$p+3$、$p+4$ 與 $p+5$ 中必有一個是 5 的倍數。另一方面，p 與 $p+8$ 是大於 5 的質數，它們不是 5 的倍數。因此，$p+5$ 與 $p+3$ 不是 5 的倍數。於是，$p+4$ 是 5 的倍數。

綜合兩段的結果，可知 $p+4$ 是 15 的倍數。

問題二　當 $r<1$ 時，y 軸與圓 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 的所有公切圓圓心都在 y 軸右方。其中與 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 外切的圓的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+r$ 或 $y^2=2(r+1)x+r^2-1$；與 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 內切的圓的圓心構成拋物物線 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x-r$ 或 $y^2=2(1-r)x+r^2-1$。兩拋物線都是開口向右。

當 $r=1$ 時，y 軸與圓 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 相切於原點。因此，與 y 軸相切於原點的所有圓都是 y 軸與 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 的公切圓，它們的圓心構成 x 軸。除了這些圓之外，其他的公切圓都與 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 外切，它們的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$ 或 $y^2=4x$。

當 $r>1$ 時，y 軸與圓 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 相交於 $(0,\sqrt{r^2-1})$ 與 $(0,-\sqrt{r^2-1})$。因此，公切圓分成四類：在 y 軸左側或右側，與 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 內切或外切。（請注意：內切時，公切圓在圓 $(x-1)^2+y^2=r^2$ 的內部。）於是，在 y 軸右側而外切的公切圓與在 y 軸左側而內切的公切圓，它們的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=r+x$ 或 $y^2=2(r+1)x+r^2-1$，其開口向右。在 y 軸右側而內切的公切圓與在 y 軸左側而外切的公切圓，它們的圓心構成拋物線 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=r-x$ 或 $y^2=2(1-r)x+r^2-1$，其開口向左。

問題三　(1)　因爲 $\frac{\overline{PE}}{\overline{BE}}=\lambda$，所以，$\triangle APC$ 與 $\triangle ABC$ 的面積之比爲 λ，亦即：

$\frac{a\triangle APC}{a\triangle ABC}=\lambda$。同理，$\frac{a\triangle ABP}{a\triangle ABC}=\mu$。因爲

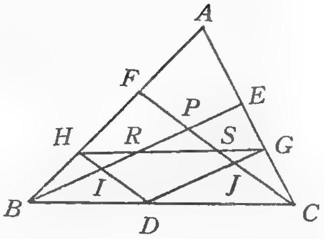
$$a\triangle APC+a\triangle ABP=a\triangle ABC-a\triangle PBC<a\triangle ABC,$$

所以，$\lambda+\mu<1$。

(2)　設 $\overline{DH}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 I，$\overline{DG}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 J。

因爲 $\overline{BE}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{DG}$，所以，$\frac{\overline{HR}}{\overline{HG}}=\frac{\overline{HI}}{\overline{HD}}$。因爲 $\overline{CF}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overline{DH}$，所以，得

$\frac{\overline{HI}}{\overline{PF}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{HD}}{\overline{CF}}$。於是，得



$\frac{\overline{HI}}{\overline{HD}}=\frac{\overline{PF}}{\overline{CF}}=\mu$，$\frac{\overline{HR}}{\overline{HG}}=\mu$。同理，

$\frac{\overline{GS}}{\overline{HG}}=\lambda$。因為$\triangle PRS\sim\triangle IRH$，

所以，$\frac{a\triangle PRS}{a\triangle IRH}=(\frac{\overline{RS}}{\overline{HR}})^2=(\frac{1-\lambda-\mu}{\mu})^2$。因為$\frac{\overline{DH}}{\overline{IH}}=\frac{1}{\mu}$，所以，

$$\frac{a\triangle DRS}{a\triangle IRH}=\frac{\overline{RS}}{\overline{HR}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{IH}}=\frac{1-\lambda-\mu}{\mu}\times\frac{1}{\mu}=\frac{1-\lambda-\mu}{\mu^2}$$ 。

由此得 $\frac{a\triangle PRS}{a\triangle DRS}=1-\lambda-\mu$，此值與$D$的位置無關。

問題四　因為 $\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_1)=0$$

所以，得

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}$$ 。

只須證明

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}>n\sqrt[n]{n!}$$ 。

因為 $2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2$ 對任意實數a與b都成立，所以，

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}\geqslant\frac{a_1+a_2}{2}，\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}\geqslant\frac{a_2+a_3}{2}，\cdots，\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{a_n+a_1}{2}$$ 。

於是，得

$$\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\cdots+\frac{a_n+a_1}{2}$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant n\sqrt[n]{n!}$$ 。

若 $\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}=n\sqrt[n]{n!}$，

則 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 且 $a_1a_2\cdots a_n=n!$，前者得 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，後者得 $a_1=1$，$a_2=2$，…，$a_n=n$。當 $n>1$ 時，此二結果互相矛盾。

二、台北市複賽試題(二)

問題一　$\dfrac{11}{2}$

因為 $\log_4 x+\log_2 y=\log_4 xy^2$，而

$$\sqrt[3]{x\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}}\leqslant\frac{1}{3}\left(x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\right)=\frac{24}{3}=8$$

所以，$xy^2\leqslant 4\cdot 8^3=2^{11}$，$\log_4 xy^2\leqslant\log_4 2^{11}=\dfrac{11}{2}$。換言之，所求最大值為 $\dfrac{11}{2}$。

問題二　$-\dfrac{1}{32}$

設所求值為 k，則

$$k\sin\frac{\pi}{31}=\sin\frac{\pi}{31}\cos\frac{\pi}{31}\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{31}\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}$$

$$=\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}$$

$$=\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}$$

$$=\frac{1}{16}\sin\frac{16\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}$$

$$=\frac{1}{32}\sin\frac{32\pi}{31}=-\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{31}$$

於是，$k=-\dfrac{1}{32}$。

問題三　36

因爲1776與10000都是16的倍數，所以，不論前四位****是任何數，****1776都是16的倍數，我們只須考慮該八位數被11整除即可。設此八位數寫成$abcd1776$，則此數被11整除的充要條件是$a+c+1+7=b+d+7+6$或$a+c+1+7=(b+d+7+6)-11$。

$a+c+1+7=b+d+7+6$或$a+c=b+d+5$的情況有：$a+c=8$且$b+d=3$，或$a+c=9$且$b+d=4$，或$a+c=10$且$b+d=5$，或$a+c=11$且$b+d=6$。

(1) 若$a+c=8$ 且$b+d=3$，則$\{a,c\}=\{3,5\}$且$\{b,d\}=\{1,2\}$。共4解。

(2) 若$a+c=9$ 且$b+d=4$，則$\{a,c\}=\{4,5\}$且$\{b,d\}=\{1,3\}$。共4解。

(3) 若$a+c=10$且$b+d=5$，則$\{a,c\}=\{4,6\}$且$\{b,d\}=\{2,3\}$。共4解。

(4) 若$a+c=11$且$b+d=6$，則$\{a,c\}=\{5,6\}$且$\{b,d\}=\{2,4\}$。共4解。

$a+c+1+7=(b+d+7+6)-11$或 $a+c+6=b+d$的情況有：$a+c=3$且$b+d=9$，或$a+c=4$且$b+d=10$，或$a+c=5$且$b+d=11$。

(5) 若$a+c=3$且$b+d=9$，則$\{a,c\}=\{1,2\}$且$\{b,d\}=\{3,6\}$或$\{4,5\}$。共8解。

(6) 若$a+c=4$且$b+d=10$，則$\{a,c\}=\{1,3\}$且$\{b,d\}=\{4,6\}$。共4解。

(7) 若$a+c=5$且$b+d=11$，則$\{a,c\}=\{1,4\}$或$\{2,3\}$且$\{b,d\}=\{5,6\}$。共8解。

綜合以上結果，可知****1776可被176整除者共36個。

問題四　99 ⋯ 9899 ⋯ 98（99 ⋯ 9共$n-1$位）

99 ⋯ 9799 ⋯ 9700 ⋯ 0400 ⋯ 04

$$=(10^{4n}-10^{3n+1})+7\times10^{3n}+(10^{3n}-10^{2n+1})+7\times10^{2n}+4\times10^{n}+4$$

$$=10^{4n}-2\times10^{3n}-3\times10^{2n}+4\times10^{n}+4$$

$$=(10^{2n}-10^{n}-2)^2\text{。}$$

因此，所求正平方根爲$10^{2n}-10^{n}-2=99 \cdots 9899 \cdots 98$，其中的99 ⋯ 9共有$n-1$位。

問題五　(2,7)，(3,10)

因爲$2\times3^{m}=n^2-5n+4=(n-1)(n-4)$，所以，可得

(1) 若n爲奇數，則可令

$$n-1=2\times3^{t}，\quad n-4=3^{m-t}\text{。}$$

於是，得 $3=2\times 3^{t}-3^{m-t}$ 。由此知 $t>0$ 且 $m-t>0$ 。再由 $1=2\times 3^{t-1}-3^{m-t-1}$ 得 $t=1$, $m=2$, $n=7$ 。

(2) 若 n 為偶數，則可令

$$n-1=3^{t},\qquad n-4=2\times 3^{m-t}\ 。$$

於是，得 $3=3^{t}-2\times 3^{m-t}$ 。由此知 $t>0$ 且 $m-t>0$ 。再由 $1=3^{t-1}-2\times 3^{m-t-1}$ 得 $t=2$, $m=3$, $n=10$ 。

問題六 2^{k+1}，其中 $n=2^{k}q$ ，q 是奇數。

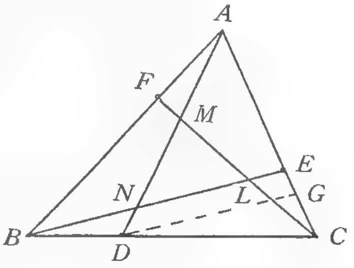
因為 $C_1^{2n}+C_3^{2n}+\cdots+C_{2n-1}^{2n}=2^{2n-1}$ ，所以，C_1^{2n} , C_3^{2n} , $\cdots$, C_{2n-1}^{2n} 的最大公因數必是 2^{l} 之形式。設 $n=2^{k}q$ ，其中 q 是奇數，$k\in Z$ ，$k\geqslant 0$ 。

對每個 $m=1,2,\cdots,n$ ，因為

$$C_{2m-1}^{2n}=\frac{2n}{2m-1}C_{2m-2}^{2n-1}=\frac{2^{k+1}q}{2m-1}C_{2m-2}^{2n-1}$$

而 $(2m-1,2^{k+1})=1$ ，所以，qC_{2m-2}^{2n-1} 是 $2m-1$ 的倍數。於是，2^{k+1} 是 C_{2m-1}^{2n} 的因數。因為 $2n=2^{k+1}q$ 不是 2^{k+2} 的倍數，所以，C_1^{2n} , C_3^{2n} , $\cdots$, C_{2n-1}^{2n} 的最大公因數是 2^{k+1} 。

問題七 $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{21})$



過 D 作 $\overline{BE}$ 的平行線，交 $\overline{AC}$ 於 G 。

因為 $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\lambda$ ，所以，$\frac{\overline{EG}}{\overline{CG}}=\lambda$ 。於是，

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{EC}}\times\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\times\lambda=\frac{\lambda^2}{1+\lambda}\ 。$$

由此知 $\frac{\overline{ND}}{\overline{AN}}=\frac{\lambda^2}{1+\lambda}$ ，而且 $\frac{a\triangle ABN}{a\triangle ABC}=\frac{a\triangle ABN}{a\triangle ABD}\times\frac{a\triangle ABD}{a\triangle ABC}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AD}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$

$$=\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}\times\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$$

同理，$\frac{a\triangle BCL}{a\triangle ABC}=\frac{a\triangle ACM}{a\triangle ABC}=\frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ 。於是，得

$$\frac{a\triangle LMN}{a\triangle ABC}=1-\frac{3\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$$ 。依假設，知 $1-\frac{3\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}=\frac{1}{2}$

$$\lambda^2-5\lambda+1=0\qquad \lambda=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{21})\ 。$$

★

教育部八十三學年度高級中學 數學競試決賽試題及參考解答

林來居
國立彰化師範大學數學系

本次競試共邀請多位教授命題，並邀請清華大學王懷權教授、林哲雄教授、臺灣師大陳昭地教授、高雄師大周武男教授、彰化師大林來居教授、中研院葉永南教授擔任試題分析與選題。茲將各競試時間及命題教授說明如下。

競試(一)：作答時間一小時五十分

第 1 題：清華大學沈昭亮教授提供。

第 2 題：臺灣師大陳昭地教授提供。

第 3 題：交通大學張鎮華教授提供。

競試(二)：作答時間一小時五十分

第 1 題：高雄師大周武男教授提供。

第 2 題：清華大學林哲雄教授提供。

第 3 題：清華大學沈昭亮教授提供。

獨立研究(一)：作答時間爲四小時

第 1 題：高雄師大周武男教授提供。

第 2 題：臺灣師大陳昭地教授提供。

第 3 題：中研院葉永南教授提供。

第 4 題：彰化師大張淑珠教授提供。

獨立研究(二)：作答時間爲一小時五十分

第 1 題：彰化師大蕭守仁教授提供。

第 2 題：交通大學張鎮華教授提供。

口　試：

第 1 題：臺灣師大陳昭地教授提供。

第 2 題：中研院葉永南教授提供。

此次競試承蒙數學界同仁參與命題、評審；以及教育部及彰化師大長官之指導及贊助，使這次比賽順利完成，特在此向他們致最高之敬意與謝意。

壹、競試(一)試題

1. 設 $p(x)$，$q(x)$是二個多項式，$p(x)$是一個 n 次多項式。若 $p(p(x))=p(x)q(x)$，且 $p(x)=0$ 有 n 個相異的實數解。

   (a) 試證：$p(0)=0$。

   (b) 試證：$p(x)$與 $q(x)$互質。

   (c) 設 $n=3$，$p(x)=0$ 的三個解為 $0, x_2, x_3$，其中 $0<x_2<x_3$，已知

   $p\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)>x_3$，試證 $q(x)=0$ 有六個相異的實數解。

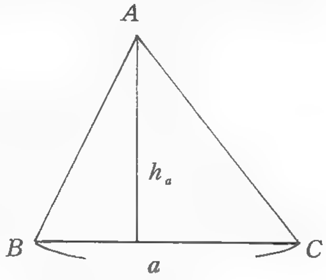
2. 設 $V-ABCD$ 為以平行四邊形 $ABCD$ 為底面的四角錐。
已知 M，N 分別為 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 中點，P，O 及 R 分別在 $\overleftrightarrow{AD}$，$\overleftrightarrow{MN}$ 及 $\overleftrightarrow{BC}$ 三條直線上，且 $\overleftrightarrow{VP}\perp\overleftrightarrow{AD}$，$\overleftrightarrow{VO}\perp\overleftrightarrow{MN}$ 及 $\overleftrightarrow{VR}\perp\overleftrightarrow{BC}$，試證：

   (a) P，O，R 三點共線。

   (b) $\triangle VMN$ 的面積小於 $\triangle VBC$ 與 $\triangle VDA$ 兩三角形面積和之半。

3. 若整數 $n\geqslant 2$，且 $0\leqslant a_i\leqslant 4$，$i=1,2,\cdots,n$，求
$(a_1-a_2)^4+(a_2-a_3)^4+\cdots+(a_{n-1}-a_n)^4+(a_n-a_1)^4$ 最大值。

貳、競試(二)試題



1. 設 a，b，c 分別為 $\triangle ABC$ 三邊，h_a, h_b, h_c 分別為 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 三高，試證：
$(b+c)h_a+(c+a)h_b+(a+b)h_c\geqslant 12S$，
其中 S 代表 $\triangle ABC$ 之面積。

2. 求最小的正整數 n，使 $20n^2+9n+1$ 為平方數。

3. 令 L 表直線 $y=2x$，F_1，F_2 分別表點 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$，$(2, 1)$，設 E 是一個以 F_1 與 F_2 為焦點而與直線 L 相切之橢圓，試問由原點到橢圓 E 上的任何點的距離最小者為何？

參、獨立研究(一)試題

1. (a) 試證：必有兩個正整數 x，y 使得對任意 i，$j\in\{0,1,2\}$，g.c.d$(x+i, y+j)>1$

成立。

(b) 試證：對任何正整數 n，必有正整數 x, y 使得對任意 $i, j\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，g.c.d $(x+i, y+j)>1$ 均成立。

2. 設 $x_1, x_2, \cdots, x_{84}$ 都是介於1與$\frac{5}{4}$之間的正數，p 表 $x_1, x_2, \cdots, x_{84}$ 這84個數的乘積，$p_j=\frac{p}{x_j}$，$(j=1,2,\cdots 84)$，試證：$\sum_{j=1}^{84} p_j\sqrt{5-4x_j}\leqslant\sum_{j=1}^{84} x_j^{84}$

3. 某次區運籃球比賽共有9隊參加，參賽隊伍中每兩隊都恰好比賽一場，每場比賽勝者得2分負者得零分，沒有和局。已知各隊得分情形為12,12,12,10,8,6,4,4,4，大會頒發參賽隊伍“特別獎”，任何參賽隊伍 A 得到特別獎的充要條件為：對於任何其它參賽隊伍 B，則(1) A 隊勝 B 隊或(2)存在參賽隊伍 C 使得 A 隊勝 C 隊而且 C 隊勝 B 隊。證明大會至少頒發3個特別報。

4. 若 n 是大於3的奇數，$\phi(n)$表所有小於 n 且與 n 互質的正整數個數，試證：

(a) 若 n 含 k 個相異的質因數，則 $2^k\mid\phi(n)$。

(b) 存在一個質數 p，滿足 $p\nmid n$，但 $p\mid(2^{\phi(n)}-1)$。

肆、獨立研究(二)試題

1. 一個正方形被分割成若干個矩形，證明這些矩形的外接圓的面積之和不小於原正方形的外接圓面積，並問此二者何時相等？

2. 在圓上有 $2n+1$ 相異點（$n\geqslant 2$），求具有下列性質的最小正整數 k^*：將任意 k^* 點塗上黑色，一定存在兩個黑點，使得這兩點將圓分割成的兩條弧當中，有一弧內部恰含有這 $2n+1$ 點中的 n 點。

伍、口試試題

1. 當凸五邊形的每一條對角線都會跟它的某一邊平行時，稱為平行五邊形。

(1) 試找出所有內接於一圓的平行五邊形。

(2) 試找出一個不能內接於任意圓的平行五邊形。

2. 某次聚會中主人邀請 A, B, C, D, E, F, G 七個客人參加，這七個客人見面後陸續互相握手一次，主人的兒子分別數每一個客人握手的次數，握手還沒有握完前，主人進來了，他的兒子告訴他，這 A, B, C, D, E, F, G 七個人握手的次

數依序分別爲6次，5次，4次，3次，2次，2次及1次。這時候主人笑笑地對他的兒子說，他們握手的次數你數的並不完全正確。

(1) 請問主人爲何能如此確定他的兒子數錯？

(2) 若實際上每人握手的次數不少於主人兒子說的次數，而且至多只有一個客人握手的次數數錯了！如果客人F握手的次數是正確的，請問能否推論那些客人握手的次數是正確的？

壹、競試(一)試題參考解答

1. 設$p(x)=0$之根爲α_i，$1\leqslant i\leqslant n$且當$i\neq j$時$\alpha_i\neq\alpha_j$

(a) 已知$p(p(x))=p(x)q(x)$

我們得到　$p(0)=p(p(\alpha_1))=p(\alpha_1)q(\alpha_1)=0$

(b) 由(a)知$p(0)=0$，故$p(x)$無常數項

由已知，$p(x)=0$無重根，故$p'(\alpha_i)\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant n$。

$p(p(x))=p(x)q(x)$兩邊微分得$p'(p(x))p'(x)=p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$

$\Rightarrow\quad p'(0)p'(\alpha_i)=p'(\alpha_i)q(\alpha_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$

$\Rightarrow\quad q(\alpha_i)=p'(0)\neq 0$

故$p(x)$與$q(x)$互質。

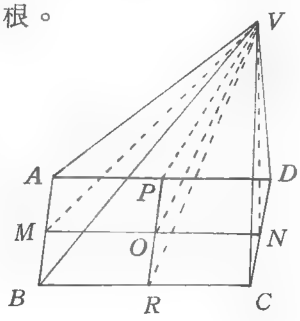
(c) 令$p(x)=ax(x-x_2)(x-x_3)$，其中a是負數。

令$p_2(x)=p(x)-x_2$，$p_3(x)=p(x)-x_3$

因爲$p(\frac{x_2+x_3}{2})>x_3$，故$p_2(x)=0$和$p_3(x)=0$也有三個相異實根，令其分別爲a_1,a_2,a_3和b_1,b_2,b_3，則$p(a_i)=x_2$，$p(b_i)=x_3$，$1\leqslant i\leqslant 3$

考慮　$Q(x)=p(p(x))=p(x)q(x)$

則$Q(x_i)=Q(a_i)=Q(b_i)=0$，$0\leqslant i\leqslant 1$，即$Q(x)=0$有9個相異實根，又$p(x)$與$q(x)$互質，故$q(x)$有六個相異實根。



2. (a) $\because\quad \overleftrightarrow{VP}\perp\overleftrightarrow{AD}$，$\overleftrightarrow{VO}\perp\overleftrightarrow{MN}$，$\overleftrightarrow{VR}\perp\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore\quad \overrightarrow{VP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\overrightarrow{VO}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，

$\overrightarrow{VR}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{VO}-\overrightarrow{VP}$

$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{VO}\cdot\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{VP}\cdot\overrightarrow{MN}$

$\therefore$ M，N爲$\overline{AB}$，$\overline{CD}$中點，$\overline{AD}=\overline{MN}=\overline{BC}$

上式　$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{VO}\cdot\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{VP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\overrightarrow{PO}\perp\overrightarrow{MN}$

同理可證　$\overrightarrow{OR}\perp\overrightarrow{MN}$

故P，O，R三點共線。

(b) $\triangle VMN=(\overline{MN}\times\overline{VO})\times\frac{1}{2}$

$\triangle VAD=(\overline{AD}\times\overline{VP})\times\frac{1}{2}$

$\triangle VBC=(\overline{BC}\times\overline{VR})\times\frac{1}{2}$

又P，O，R三點共線，$\overline{PR}\perp\overline{MN}$且$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{PO}=\overline{OR}$　即在$\triangle VPR$中，$\overline{VO}$爲中線

$\overline{VP}+\overline{VR}>2\overline{VO}$

$\frac{1}{2}\overline{VO}\cdot\overline{MN}<\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overline{VR}\cdot\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{VP}\cdot\overline{AD})$

$\triangle VMN<\frac{1}{2}(\triangle VBC+\triangle VAD)$

3. 因爲每對a_i和a_j恆有$(a_i-a_j)^4\leqslant 4^4$，所以$A\leqslant 4^4 n$

當n爲偶數時，取$a_1=a_3=\cdots\cdots=a_{n-1}=0$和$a_2=a_4=\cdots\cdots=a_n=4$，共所對應的$A=4^4 n$，所以最大值在$n$偶數時是$4^4 n$。

當n爲奇數時，取$a_1=a_3=\cdots\cdots=a_{n-2}=a_n=0$和$a_2=a_4=\cdots\cdots=a_{n-1}=4$，其所對應的$A=4^4(n-1)$

對任一種可能的和

$$A=(a_1-a_2)^4+(a_2-a_3)^4+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_n)^4+(a_n-a_1)^4$$
$$=x_1^4+x_2^4+\cdots\cdots+x_{n-1}^4+x_n^4$$

其中$x_1=a_1-a_2$，$x_2=a_2-a_3$，……，$x_{n-1}=a_{n-1}-a_n$，$x_n=a_n-a_1$

因爲n是奇數，必存在相鄰的x_i和x_{i+1}同號（x_n與x_1視爲相鄰）

結果　$x_i^4+x_{i+1}^4\leqslant a^4+b^4\leqslant(a+b)^4\leqslant 4^4$

其中　$a=|x_i|$，$b=|x_{i+1}|$，$a+b=|a_i-a_{i+2}|\leqslant 4$

故　$A\leqslant 4^4(n-1)$　結果當n是奇數時，其最大值是$4^4(n-1)$。

貳、競試(二)試題參考解答

1. 因 $a\times h_a=b\times h_b=c\times h_c=2S$

   原式可改為 $(a+b+c)h_a+(a+b+c)h_b+(a+b+c)h_c\geqslant 18S$

   即要證 $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)\geqslant 18S$

   但 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ ， $h_a+h_b+h_c\geqslant 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}$

   相乘得 $(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)\geqslant 9\sqrt[3]{(ah_a)(bh_b)(ch_c)}=18S$

2. 因 $20n^2+9n+1=(4n+1)(5n+1)$ 為平方數，而且 $4n+1$ 與 $5n+1$ 互質，得 $4n+1$ 與 $5n+1$ 皆是平方數。

   令 $4n+1=a^2$, $5n+1=b^2$ ，其中 a , b 皆為大於1 的正整數

   因 $a^2=4n+1$ 為奇數，故 a 必為奇數，表 $a=2c+1$ ，其中 c 為正整數

   因此 $4n+1=a^2=(2c+1)^2$ 化簡得 $n=c(c+1)$

   從而得 $b^2=5n+1=5c(c+1)+1$ ，故知 b 為奇數，表 $b=2d+1$ ，其中 d 為正整數，則得 $(2d+1)^2=5c(c+1)+1$

   化簡得 $4d(d+1)=5c(c+1)$

   因此 $5\mid d$ 或 $5\mid(d+1)$

   當 $5\mid d$ 時，令 $d=5e$ ，得 $c(c+1)=4e(5e+1)$

   當 $5\mid(d+1)$ 時，令 $d+1=5f$ ，得 $c(c+1)=4f(5f-1)$

   因為 $c(c+1)$ 為兩個連續正整數之積，在第二情況中取 $f=2$ ，則得

   $c(c+1)=8\times 9$

   解得 $c=8$, $d=9$ 此為滿足 $4d(d+1)=5c(c+1)$ 的最小正整數，因此 $n=c(c+1)=72$ ，最後驗算

   $20n^2+9n+1=(4n+1)(5n+1)=289\times 361=17^2\times 19^2=(323)^2$ 為一個平方數，因此 $n=72$ 為所求。

3. F_1 與 F_2 在 $y=\frac{1}{2}x$ 上，令 p_1 , p_2 表 E 在 $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ 上的頂點

   若知 $O-P_1-F_1$ ，則 $\overline{OP_1}$ 即為所求。

   令 $\overleftrightarrow{F_1'F_1}$ 垂直 L 於 k ，且 $\overline{F_1'K}=\overline{KF_1}$ ，連 $\overleftrightarrow{F_1'F_2}$ 交 L 於 T ，則 T 為 L 對 E 的切點，且由橢圓的性質得知 $\overline{P_1F_1}+\overline{P_1F_2}=\overline{F_1'T}+\overline{F_2T}=\overline{F_1'F_2}$

$\overleftrightarrow{F_1'F_1}$ 的方程式為 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-1)$

因為 $\overline{F_1K}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$，由上面方程式可設 $F_1'=(x,-\frac{1}{2}x+1)$

因 $\overline{F_1K}=\overline{F_1'K}$，得 $\frac{|2x-(-\frac{1}{2}x+1)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$

結果 $F_1'=(\frac{-1}{5},\frac{11}{10})$

因此 $\overline{F_1T}+\overline{F_2T}=\overline{F_1'F_2}$

$$=\sqrt{(\frac{-1}{5}-2)^2+(\frac{11}{10}-1)^2}=\frac{\sqrt{485}}{10}=\overline{P_1F_1}+\overline{P_1F_2}$$

而 $\overline{OF_1}+\overline{OF_2}=\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}+\sqrt{2^2+1^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}>\frac{\sqrt{485}}{10}$

因此 $O-P_1-F_1-F_2$

令所欲求之最短距離是 d，則 $d=\overline{OP_1}$

結果 $\overline{OF_1}+\overline{OF_2}=(d+\overline{P_1F_1})+(d+\overline{P_1F_2})=2d+\overline{P_1F_1}+\overline{P_1F_2}$

即 $\frac{3\sqrt{5}}{2}=2d+\frac{\sqrt{485}}{10}$

結果 $d=\frac{15\sqrt{5}-\sqrt{485}}{20}$

參、獨立研究(一)試題參考解答

1. 設 $p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{nn}$ 為 n^2 個相異質數

考慮
$$\begin{cases} x\equiv 0 & \text{mod} \quad p_{11}\times p_{12}\times\cdots\times p_{1n} \\ x\equiv -1 & \text{mod} \quad p_{21}\times p_{22}\times\cdots\times p_{2n} \\ \vdots & \\ x\equiv -n & \text{mod} \quad p_{n1}\times p_{n2}\times\cdots\times p_{nn} \end{cases}$$

由中國餘數定理，必有一共同解 c 。

另外考慮

$$\begin{cases} y \equiv 0 & \text{mod} \quad p_{11} \times p_{21} \times \cdots \times p_{n1} \\ y = -1 & \text{mod} \quad p_{12} \times p_{22} \times \cdots \times p_{n2} \\ \quad \vdots & \\ y = -n & \text{mod} \quad p_{1n} \times p_{2n} \times \cdots \times p_{nn} \end{cases}$$

由相同定理，必有一共同解 d

則 $\gcd(c+i, d+j) > 1$ 對於所有 $i, j = 0, 1, 2, \cdots, n$ 。

2. 若 $t \in [1, \frac{5}{4}]$，則 $\sqrt{5-4t} \leqslant t$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{84}) = \sum_{j=1}^{84} p_j \times \sqrt{5-4x_j} \leqslant \sum_{j=1}^{84} p_j x_j = 84p$$

而且 $\dfrac{x_1^{84} + \cdots + x_{84}^{84}}{84} \geqslant x_1 \times \cdots \times x_{84} = p$

結果 $x_1^{84} + \cdots + x_{84}^{84} \geqslant 84p \geqslant \sum_{j=1}^{84} p_j \times \sqrt{5-4x_j}$

3. 解法：若 A 隊得分大於 B 隊

令 M 爲被 A 擊敗的隊伍所成的集合

N 爲被 B 擊敗的隊伍所成的集合

如果 B 勝 A 則 $A \in N$ 但是 $A \notin M$，但 A 隊得分大於 B 隊，故 $|M| > |N|$

$M - N = \phi$

故存在 C 隊使得 $C \in M - N$

即存在 C 隊，使得甲隊勝 C 隊，而 C 隊勝 B 隊。因此，A 得特別獎。

由已知有三隊得分最高，故大會至少頒發三個特別獎。

4. (a) 若 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是互異的質數，且所有 p_i 異於 2 。

結果 $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i}) = n \prod_{i=1}^{k} (\frac{p_i - 1}{p_i}) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i - 1}(p_i - 1)$

因爲所有 p_i 異於 2 ，故 $2^k \mid \phi(n)$。

(b) 令 $\phi(n) = \ell \times 2^k$ 且 $2^{\phi(n)} - 1 = y^{2k} - 1$ ，則 $y = 2^{\ell}$

結果 y 是偶數且 $y > 3$（因爲某個 $p_i - 1 > 2$ ）

又 $y^{2k} - 1 = (y^{2^{k-1}} + 1)(y^{2^{k-2}} + 1) \cdots (y^2 + 1)(y + 1)(y - 1)$，

這些因數兩兩互質，且每一項至少含一個質因數。

所以 $2^{\phi(n)}-1$ 至少有（$k+1$）個質因數，而 n 只有 k 個質因數

即存在質數 p 使得 $p \mid 2^{\phi(n)}-1$ 但 $p \nmid n$。

肆、獨立研究(二)試題參考解答

1. 若矩形長寬為 a，b，則其外接同面積是 $\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$

   但 $\frac{\pi}{4}(a^2+b^2) \geqslant \frac{\pi}{2}(\sqrt{ab})^2$ 且等號相等的充要條件是 $a=b$

   故等號相等的充要條件是矩形為正方形。

   若某正方形被分割成若干矩形，而其面積分別為 $R_1, \cdots, R_n$，且其外接圓面積分別為 $S_1, \cdots, S_n$

   則　$S_1+\cdots+S_n \geqslant \frac{\pi}{2}(R_1+\cdots+R_n) = \frac{\pi}{2}$（原正方形面積）

   ＝原正方形外接圓面積

   結果等號成立的充要條件是正方形被分割成若干正方形。

2. 設（$2n+1$）點，從某一點開始，依順時針方向，編號為 $0,1,2,\cdots,2n$

   令　$S=\{0,1,2,\cdots,2n\}$

   則本題相當於求最小正整數 K^*，使得若 $A\subseteq S$ 且 $|A|=K^*$，則存在 $i,j\in A$ 使得 $i-j\equiv(n+1)\left(\mathrm{mod}\,(2n+1)\right)$，也可以求最大正整數 p^*，使得若 $A\subseteq S$ 且 $|A|=p^*$，則對所有 $i,j\in A$，$i-j\not\equiv n+1\left(\mathrm{mod}\,(2n+1)\right)$ 恆對。請注意 $K^*=p^*+1$

   當 $i-j\equiv(n+1)(\mathrm{mod}\,(2n+1))$ 或 $j-i\equiv(n+1)\left(\mathrm{mod}\,(2n+1)\right)$，則稱 i 和 j「相關」。

   因為 $n\geqslant 2$，每一數最多和兩異於 i 的數相關，就是 $i\pm(n+1)\,\mathrm{mod}\,(2n-1)$

   又因為 $\gcd(2n+1, n+1)=\gcd(-1, n+1)=1$，所以若將「相關」這關係用圖表示，將形成一長度為（$2n+1$）的迴圈，例如 $n=3$ 時

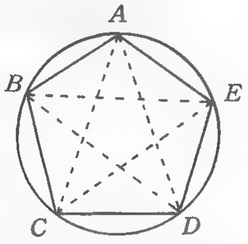
   $$0 \to 4 \to 1 \to 5 \to 2 \to 6 \to 3 \to (0)$$

   結果長度為（$2n+1$）的迴圈，最多可取 n 點兩兩不相關

   所以　$p^*=n$，$K^*=n+1$

伍、口試試題參考解答

1. (1) 如右圖

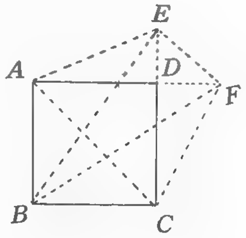


已知A，B，C，D，E五點共圓且$\overline{BE}\parallel\overline{CD}$，$\overline{AC}\parallel\overline{DE}$，$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$\overline{BD}\parallel\overline{AE}$，$\overline{CE}\parallel\overline{AB}$

故知$ABCD$，$BCDE$，$CDEA$，$DEAB$，$EABC$ 都是等腰梯形。於是$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}=\overline{AB}$

進而$\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA=\angle EAB=\angle ABC$ 即得知$ABCDE$爲正五邊形。反之，任一正五邊形都是內接於一圓之平行五邊形。

(2) 如右圖



設$ABCD$是邊長爲1的正方形，延長$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CD}$，分別取F，E使得$\overline{DF}=\overline{DE}=\ell>0$，結果$\overline{AB}\parallel\overline{CE}$，$\overline{BC}\parallel\overline{AF}$，$\overline{AC}\parallel\overline{EF}$選取適當的長$\ell$使得$\overline{BE}\parallel\overline{CF}$（$\Longleftrightarrow \overline{BF}\parallel\overline{AE}$），即$\overline{CF}$的斜率等於$\overline{BE}$的斜率

此時 $\dfrac{1}{\ell}=\dfrac{1+\ell}{1}$ 即 $\ell=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

結果$ABCFE$爲一平行五邊形，但不能內接於任一圓。

2. (1) $6+5+4+3+2+2+1=23$ 爲奇數，故不可能。

(2) 若G是正確，則因$A\geqslant 6$，故$A=6$，結果A必正確。因此A與每人皆握手結果B和G以外的人握手，但是F是正確，所以C和A，B，D，E握手，故C正確。因此E已經3次了，所以E錯，D正確。若G是錯，則A，B，C，D，E，F皆正確。結果A，B，C，D，F必正確。

★

教育部八十三學年度高級中學化學科競賽總決賽活動與試題參考解答(二)

方泰山　蕭次融　左如茜
國立臺灣師範大學化學系

（II）　無機化學

1. 參考下列游離能數據：　　（10分）

	第一游離能	第二游離能	第三游離能	第四游離能
H	13.6 ev			
He	24.6	?		
Li	5.4	75.6	122.5	
Be	9.3	18.2	153.9	217.7

回答下列問題：

(1)　計算 He 的第二游離能。

(2)　解釋 Li 的第三個游離能的變化。

(3)　解釋下列原子或離子的相對大小。

H^-　　He　　Li^+

2. 砷(As)與磷(P)爲同一族的元素，但 H_3PO_3 能在水中形成酸性水溶液，H_3AsO_3 卻爲弱鹼性水溶液，試以分子結構式表示此性質之不同。　　（4分）

3. 平衡下列方程式(得自行加入 H^+, OH^- 或 H_2O)　　（10分）

(1)　$NO_2^- + Cl_2 \rightarrow NO_3^- + Cl^-$

(2)　$XeF_4 + H_2O \rightarrow XeO_3 + Xe + O_2 + HF$

4. 下表爲空氣的體積的百分組成：　　（10分）

成　　分	體積百分比%
氮	78.08
氧	20.94
氬	0.934
二氧化碳	0.032

(1) 求空氣中氮的莫耳分率。

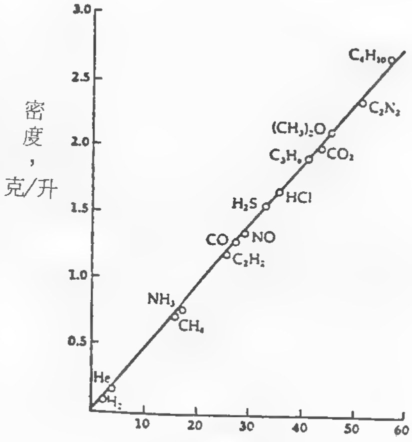
(2) 在一大氣壓下氮的分壓多大（mmHg）？

(3) 在一大氣壓下，溶解在水中的氮的莫耳分率為 9.11×10^{-6}，試求水中所溶解的氮的重量莫耳濃度。

5. 氣體分子在標準狀況下的分子量與密度的關係如右圖所示，由圖可知密度D與分子量M成正比，可以用D＝km 表示。密度單位為克／升，分子量單位為克／莫耳。 (8分)

(1) 試以壓力(P)，氣體常數(R)，氣溫度(T)表示k。

(2) 試根據(1)的結果計算k值。



分子量，g/mol

6. 空氣中的二氧化碳微溶於自然的雨水中，產生 H_2CO_3，使得雨水成微酸性。計算雨水的pH值（CO_2 溶於水中的平衡常數為 3.5×10^{-2}，H_2CO_3 的 k_{a1} 為 4.3×10^{-7}，CO_2 的分壓為0.00033 atm）。

(14分)

7. 一般難溶於水的鹽類，可以用溶度積（Ksp）估算在水中的解離度。但是有些鹽類由於水解的緣故。例如PbS，在水中的溶解度卻比由Ksp的估算值要大多。(20分)

(1) 已知 PbS 的 $Ksp=1.0\times10^{-28}$，不考慮 S^{-2} 的水解。試由Ksp值估算PbS在水中的溶解度（以體積莫耳濃度表示）。

(2) 已知 H_2S 的解離常數 k_{a1} 為 1.0×10^{-7}，k_{a2} 為 3×10^{-13}，試計算 S^{-2} 及 HS^- 的水解平衡常數。

(3) 考慮 S^{-2} 的水解，計算 PbS 在水中的溶解度（以體積莫耳濃度表示）。假設 $[H^+]\cong[OH^-]$。

8. 大氣中的臭氧層被破壞，是目前全球的三大環境問題之一。臭氧層存在地球上空的平流層中（離地表約 15 km），會吸收陽光中波長200 nm～300 nm 的紫外線，解離成O與O_2。

$$O_3 \xrightarrow{hv} O + O_2$$

而後因氧原子的活性很大，因此進行下列反應：

$$O + O_2 \rightarrow O_3$$

1974年，M. J. Molina 和 F. S. Rowland 發現人造的 CFCs（氟氯碳化合），$CClF_3$，CCl_2F_2 擴散至平流層中，受到陽光的照射，會產生氯原子，原子會進行下列反應：

$$Cl_{(g)} + O_{3(g)} \rightarrow ClO_{(g)} + O_{2(g)}$$
$$ClO_{(g)} + O_{(g)} \rightarrow Cl_{(g)} + O_{2(g)}$$
（14分）

(1) 畫出臭氧分子結構（包括共振結構）。

(2) 預測O-O-O之間的角度，並說明之。

(3) 在 Molina 和 Rowland 預測氯原子和臭氧的反應中，氯原子是扮演何種角色?

(4) 事實上，上述假設的反應並不是造成破壞臭氧層的主要反應，爲什麼？

9. 電解800毫升0. 5M的碘化鈣水溶液。（10分）

(1) 參考下列兩半反應的電位

$$2I^- \rightarrow I_{2(s)} + 2e^- \qquad E^0 = -0.54\,V$$
$$H_2O \rightarrow 1/2\,O_{2(g)} + 2H^+ + 2e^- \qquad E^0 = -1.23\,V$$

試問在陽極產生的是 I_2？或是 O_2？

(2) 試寫在陰極發生的半反應方程式。

(3) 一般使用汞極電解槽會造成水銀污染，所以多以石綿板隔膜電解槽，但是此法卻會造成產品的污染，亦即在產品中出現一些次氯酸鹽的副產物。試以離子方程式表示次氯酸鹽的生成。

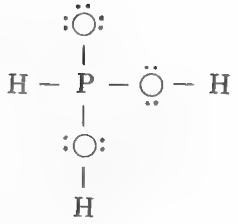
(4) 電解一段時間後，在陰極產生了890毫升的氫氣，壓力爲752mmHg，當時溫度爲20°C，試問此時溶液中 Ca^{2+}，I^- 的濃度（M）?（水在20°C時，蒸氣壓爲18mmHg）

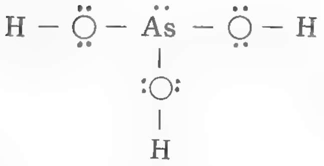
參考解答

1. (1) $13.6 \times 2^2 = 54.4$ ev（2分）

(2) Li 的第一游離能較小（5.4 ev），因其在2S軌域的電子較易脫離。
第二游離能和第一游離能的差異很大，是因爲第一游離能是主量子數 $n=2$，第二游離能是由 $n=1$ 的電子被脫離。
第三游離能可以用波爾電子軌道解釋。（4分）

(3) 以荷電荷解釋：H^-，He，Li^{2+} 的電子組態相同，均爲 $1s^2$。但荷電荷分別爲1, 2, 3。因此其大小爲 $H^- > He > Li^+$。（4分）

2.  $\equiv HPO(OH)_2$ （2分）

 $\equiv As(OH)_3$ （2分）

3. (1) $NO_2^- + Cl_2 + 2OH^- \rightarrow NO_3^- + 2Cl^- + H_2O$ （4分）

(2) $6XeF_4 + 12H_2O \rightarrow 2XeO_3 + 4Xe + 3O_2 + 24HF$ （6分）

or

$5XeF_4 + 10H_2O \rightarrow 2XeO_3 + 3Xe + 2O_2 + 20HF$

or

$4XeF_4 + 8H_2O \rightarrow 2XeO_3 + 2Xe + O_2 + 16HF$

4. (1) 0.7808 （4分）

(2) $760 \times 0.7808 = 593.4\,mmHg$ （2分）

(3) $9.11 \times 10^{-6} = \dfrac{n_{N_2}}{n_{N_2} + n_{H_2O}} \doteqdot \dfrac{n_{N_2}}{n_{H_2O}}$ （4分）

重量莫耳濃度 $= \dfrac{n_{N_2}}{n_{H_2O}} \times \dfrac{1000}{18} = 9.11 \times 10^{-6} \times \dfrac{1000}{18} = 5.06 \times 10^{-4}$ m

5. (1) $PV = nRT = \dfrac{W}{M}RT$, $PM = \dfrac{W}{V}RT$, $PM = DRT$

$\therefore \quad D = \dfrac{P}{RT}M$ 故 $k = \dfrac{P}{RT}$ （4分）

(2) 標準狀況下， $k = \dfrac{1}{0.082 \times 273} = 0.0446$ 莫耳/升 （4分）

6. $CO_{2(g)} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons H_2CO_{3(aq)}$

$$K = \frac{[H_2CO_3]}{P_{CO_2}} = 3.5 \times 10^{-2} = \frac{[H_2CO_3]}{0.00033}$$

$[H_2CO_3] = 1.16\times10^{-5}$ M （至此給6分）

$H_2CO_{3(aq)} \rightleftharpoons H^+_{(aq)} + HCO_3^-{}_{(aq)}$

$$4.3\times10^{-7} = \frac{[H^+][HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = \frac{x}{1.16\times10^{-5}-x} \doteqdot \frac{x^2}{1.16\times10^{-5}}$$

$x = [H^+] = \sqrt{1.16\times10^{-5}\times4.3\times10^{-7}} = 2.23\times10^{-6}$ M （至此給12分）

pH值 $= 5.65$ （14分）

7. (1) $Ksp = 1.0\times10^{-28} = [Pb^{2+}][S^{2-}] = [Pb^{2+}]^2$

$\therefore\ [Pb^{2+}] = 1\times10^{-14}$ M （4分）

(2) $H_2S \rightleftharpoons H^+ + HS^-$, $K_{a_1} = \dfrac{[H^+][HS^-]}{[H_2S]}$

$HS^- \rightleftharpoons H^+ + S^{2-}$, $K_{a_2} = \dfrac{[H^+][S^{2-}]}{[HS^-]}$

水解方程式 $S^{2-} + H_2O \rightleftharpoons HS^- + OH^-$

S^{2-} 的水解平衡常數:

$$K = \frac{[HS^-][OH^-]}{[S^{2-}]} = \frac{KW}{K_{a_2}} = \frac{1\times10^{-14}}{3\times10^{-13}} = 3.3\times10^{-2}$$ （3分）

$HS^- + H_2O \rightleftharpoons H_2S + OH^-$

HS^- 的水解平衡常數：

$$K = \frac{[H_2S][OH^-]}{[HS^-]} = \frac{KW}{K_{a_1}} = \frac{1\times10^{-14}}{1\times10^{-7}} = 1.0\times10^{-7}$$ （3分）

(3) $[H^+][OH^-] = KW = 1\times10^{-14}$

$[H^+]^2 = 1\times10^{-14}$

$[H^+] = [OH^-] = 1\times10^{-7}$ M

由於 $[Pb^{2+}] = [S^{2-}] + [HS^-] + [H_2S]$ ……………①

$[Pb^{2+}][S^{2-}] = 1\times10^{-28}$

$\dfrac{[HS^-][OH^-]}{[S^{2-}]} = 3.3\times10^{-2}$, $[HS^-] = 3.3\times10^{5}[S^{2-}]$

$\dfrac{[H_2S][OH^-]}{[HS^-]} = 1.0\times10^{-7}$, $[H_2S] = [HS^-]$

∴ $[H_2S] = 3.3\times10^{5}[S^{2-}]$

由① $[Pb^{2+}] = [S^{2-}]+3.3\times10^{5}[S^{2-}]+3.3\times10^{5}[S^{2-}]$

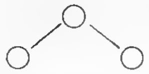
$= 6.6\times10^{5}[S^{2-}]$

∴ $[S^{2-}] = 1.5\times10^{-6}[Pb^{2+}]$ 代入 Ksp

$1.5\times10^{-6}[Pb^{2+}]^{2} = 1\times10^{-28}$

∴ $[Pb^{2+}] = 8\times10^{-12}$ M（溶解度） （10分）

8. (1) （4分）

(2)  的角度爲 117°（比 120° 小），因爲中間的氧原子是以 SP^2 軌域形成鍵結，因此其形成鍵角應爲 120°，但是受到孤對電子的擠壓，會小於 120°。 （4分）

(3) 催化劑。 （2分）

(4) 因爲這個反應須要氧原子，而氧原子的濃度很小，因此這個反應並不容易進行。 （4分）

9. (1) I_2 （2分）

(2) $2H_2O + 2e^- \rightarrow H_{2(g)} + 2OH^-$ （2分）

(3) $Cl_2 + 2OH^- \rightarrow OCl^- + Cl^- + H_2O$ （2分）

(4) 電解過程中，$[Ca^{2+}]$保持不變， ∴ $[Ca^{2+}]$仍爲 0.15 M

$[Ca^{2+}] = 0.15$ M　　　$[I^-] = 0.208$ M

$\frac{752}{760}\times0.890 = n\times0.082\times293$，　$n = 0.0366$ 莫耳 H_2

電子莫耳數 $= 2\times0.0366 = 0.0732$ 莫耳

消耗 I^- 莫耳數 $= 0.0732$

原有 $I^- = 0.15\times0.8\times2 = 0.24$ 莫耳

剩下 $I^- = 0.24-0.0732 = 0.1668$ 莫耳

∴ $[I^-] = \frac{0.1668}{0.8} = 0.208$ M （2分）

（Ⅲ） 分析化學

1. 已知0.1 M NH_3 水溶液的pH值爲11.13，試求此溶液的 $[OH^-]$、解離度（α）與解離常數（k_b）。 （20分）
2. 試求63.3 ppm $K_3Fe(CN)_6$（式量＝329.3克）溶液中的 K^+ 體積莫耳濃度。 （10分）
3. 混合200 mL的0.0100 M $Ba(NO_3)_2$ 與100 mL的0.100 M $NaIO_3$，試求該溶液中 $Ba(IO_3)_2$ 的溶解度。（已知 $Ba(IO_3)_2$ 的 K_{sp} 爲 1.57×10^{-9}） （20分）
4. 已知一溶液可能含有銅、鋇、鈣、鎂、鉀等離子。當溶液加入 $(NH_4)_2SO_4$ 後，產生白色沉澱；經鹽酸溶解後以焰色分析，火焰呈綠色。澄清無色的濾液，若加入 $NH_{3(aq)}$ 及 Na_2HPO_4，亦產生白色沉澱物；若加入 $(NH_4)_2C_2O_4$ 則無沉澱。白色的磷酸沉澱物經分離後可溶解於HCl溶液。
   若將此一溶解液加入8N NaOH以及 $C_6H_3(OH)_2-N=N-C_6H_4NO_2$ 後，則產生藍色沉澱。其次，如果將磷酸鹽之濾液經鹽酸消化後，再以焰色試驗法分析，僅得到鈉離子之焰色反應。試問此一未知溶液含有那些金屬離子？ （20分）
5. 試求50.00 mL的0.1000 M AcOH（$K_a=1.75\times10^{-5}$），加入0.1000 M的NaOH 10 mL時溶液的 $[H_3O^+]$。 （20分）
6. 將鋇離子以硫酸鋇沉澱的方式來定量鋇時，若有其他鋇鹽如氯化鋇或硝酸鋇共同沉澱於其上，則有可能使分析結果產生誤差。試問其誤差爲正誤差（分析值比實際值高）或負誤差（分析值比實際值低）並說明其理由。 （10分）
   （原子量 Ba＝137.3，Cl＝35.5，S＝32.07，O＝16.00，N＝14.01）

參考解答

1. 因爲水溶液的pH值爲11.13
   所以 $[H^+]=10^{-11.13}$ M
   所以 $[OH^-]=10^{-2.87}$ M
   $[OH^-]=1.35\times10^{-3}$ M……………………(1)
   假設解離度爲α，並且

$NH_3 + H_2O \rightarrow NH_4^+ + OH^-$

0.1

-0.1α　　　0.1α　0.1α

$(0.1-0.1\alpha)$　　　0.1α　0.1α

已知　$[OH^-]=1.35\times10^{-3}$ M $=0.1\alpha$

所以　$\alpha=1.35\times10^{-2}$ ………………………… (2)

因此　$K_b=[NH_4^+][OH^-]/[NH_3]=(0.1\alpha)^2/0.1(1-\alpha)$

$=1.82\times10^{-5}$ ………………………… (3)　　　(20分)

2. 已知　63.3 ppm = 63.3 mg/L，而且　$K_3Fe(CN)_6$ 之式量 = 329.3 g

所以　$K_3Fe(CN)_6$ 之體積莫耳濃度爲

$(63.3\times10^{-3}$ g/L$)/(329.3$ g/mol$)=1.92\times10^{-4}$ mol/L（或M）

假設　$K_3Fe(CN)_6$ 完全解離

所以　$[K^+]=3\times1.92\times10^{-4}$ mol/L

$=5.77\times10^{-4}$ mol/L（或M）…………answer　　　(10分)

3. 假設 $Ba(NO_3)_2$ 與 $NaIO_3$ 在水中完全解離，並產生下列沉澱反應

$Ba^{2+}{}_{(aq)} + 2\,IO_3^-{}_{(aq)} \rightarrow Ba(IO_3)_{2(s)}$

已知 Ba^{2+} 與 IO^{3-} 之起始濃度因稀釋而成爲m

$F_{Ba} = 0.01$ M $\times$ 200 mL/ 300 mL $= 6.67\times10^{-3}$ M

$F_{IO_3} = 0.1$ M $\times$ 100 mL/ 300 mL $= 3.33\times10^{-2}$ M

假設 Ba^{2+} 被 IO_3^- 完全沉澱，並由 $Ba(IO_3)_2$ 解離得 y M Ba^{2+} 與 2 y M 的 IO^{3-}，

即　$Ba^{2+}{}_{(aq)} + 2\,IO_3^-{}_{(aq)} \rightarrow Ba(IO_3)_{2(s)}$

6.67×10^{-3}　　3.33×10^{-2}

-6.67×10^{-3}　　$-2\times6.67\times10^{-3}$

$+y$　　　$+2y$

y　　　$(2.0\times10^{-2}+2y)$

所以

$K_{sp}=y(2.0\times10^{-2}+2y)^2 = 1.57\times10^{-9}$

假設　$y \ll 2.0\times10^{-2}$ M

所以　$1.57\times10^{-9}=y(2.0\times10^{-2})^2$

$y=3.9\times10^{-6}$ M　　(20分)

4. (20分)

未知溶液 —$(NH_4)_2SO_4$→
- 白色沉澱 $BaSO_4$ —焰火試驗→ 綠色　⇒ $Ba^{2+}(BaSO_4)$
- 無色溶液 (⇒ 非 Cu^{2+})
  - 測試 a
  - 測試 b

測試 a —NH_3/Na_2HPO_4→ 白色沉澱 (Ca or Mg) $CaHPO_4$ $MgHPO_4$ —HCl→ —8N NaOH, $C_6H_3(OH)_2$-NN-$C_6H_4NO_2$→
- 藍色沉澱 $Mg(OH)_2$ (⇒ Mg^{2+})
- 溶液 —焰火試驗→ 只有Na^+, 即無K^+

測試 b —$(NH_4)_2C_2O_4$→ 無沉澱 (⇒ 非 Ca^{2+})

此未知溶液只含Ba^{2+}及Mg^{2+}。

5. (20分)

假設酸鹼反應總體積為60.00mL，則 AcOH 與 NaOH 的起始濃度各為

$F_{AcOH}=0.1\,M\times5/6=8.33\times10^{-2}$ M

$F_{NaOH}=0.1\,M\times5/6=1.67\times10^{-2}$ M　　(5分)

假設 NaOH 完全反應，並由 AcOH 解離 y M以達成平衡，則

AcOH ⟶	AcO^- +	H^+
8.33×10^{-2}		
-1.67×10^{-2}	1.67×10^{-2}	
$-y$	y	y
$(6.67\times10^{-2}-y)$	$(1.67\times10^{-2}+y)$	y

(5分)

因爲

$K_a = [AcO^-][H^+]/[AcOH]$

$= (1.67\times 10^{-2} + y)y/(6.67\times 10^{-2} - y)$ （5分）

假設 $y \ll 1.67\times 10^{-2}$ M

$1.75\times 10^{-5} = y\,1.67\times 10^{-2}/6.67\times 10^{-2}$

$y = 7\times 10^{-5}$ M……………………………Answer （5分）

6. （10分）

已知硫酸鋇、氯化鋇與硝酸鋇之式量各爲

$Fw_{BaCl_2} = 208.3$

$Fw_{BaSO_4} = 233.3$

$Fw_{Ba(NO_3)_2} = 261.3$

即 $Fw_{BaCl_2} < Fw_{BaSO_4} < Fw_{Ba(NO_3)_2}$ （5分）

因爲鋇離子的重量係決定於硫酸鋇沉澱物重量 $Wt(BaSO_4)$，即

$Wt(Ba) = Wt(BaSO_4)\times(Fw_{Ba}/Fw_{BaSO_4})$ （5分）

所以當鋇以氯化鋇共同沉澱時，因重量較輕，將產生負誤差(分析值比實際値低)；若以硝酸鋇共同沉澱時，將因重量較重，而產生正誤差(分析值比實際値高)。

(Ⅳ) 有機化學

1. 乙醇和二甲醚的分子式都是 C_2H_6O 對此二化合物回答下列問題：(30分)
   (A) 兩者之間的關係叫做什麼？
   (B) 何者沸點較高？爲什麼？
   (C) 兩者是否能互溶？爲什麼？
   (D) 從廣義上來看，乙醇是酸或鹼？爲什麼？試列出反應式說明之？
   (E) 對二甲醚回答(D)的問題？
   (F) 寫出乙醇及二甲醚燃燒的反應式。兩者燃燒熱是否相等？如果不相等，相差多少？試利用下列平均鍵能算算看：(乙醇的莫耳汽化熱是 40 KJ/mol，二甲醚在常溫時是氣體)

   平均鍵能：C—H = 414 KJ/mol，　C—C = 360 KJ/mol
   C—O = 360 KJ/mol，　O—H = 464 KJ/mol
   $O=O(O_2)$ = 497 KJ/mol，$C=O(CO_2)$ = 803 KJ/mol

2. 取某蛋白質溶液 10 mL，將其中的氮完全轉變成氨，並使氨吸收於 0.25 M的硫酸 20 mL 中。在此溶液中加適當的指示劑，以 0.5 N氫氧化鈉滴定時，用去 5.0 mL。試回答下列問題：　（20分）
   (A) 所生成的氨重量多少毫克？
   (B) 設此蛋白質含氮 16％，蛋白質溶液的比重為 1.06，試求此蛋白質溶液的重量百分率濃度？
3. 有三種酯甲、乙、丙，具有同一分子式 $C_5H_{10}O_2$ 試以此回答下列問題：
   （原子量：C＝12，H＝1，O＝16）　（20分）
   (A) 取酯甲經水解（酯化的逆反應）所得的酸 0.264 g，以 0.1 M的氫氧化鈉中和時，用去 30.00 mL，酯甲的示性式是什麼？
   (B) 取酯乙水解所得的醇丁 0.23 g，加入金屬鈉時，產生氫氣 56.00 mL（25℃，1 大氣壓時）。酯乙的示性式是什麼？
   (C) 水解酯丙，得乙酸和醇戊。醇戊以酸性二鉻酸鉀水溶液氧化所得化合物己，不呈酸性，也不呈銀鏡反應。酯丙的示性式是什麼？醇戊及化合物己是什麼？
4. 試寫出下列各反應的化學方程式：　（10分）
   (A) 天然氣的燃燒
   (B) 用甘油製造硝化甘油
   (C) 甲烷加氯氣照光或加熱
   (D) 乙醇與乙酸反應
5. 為何有機物的種類已超過百萬種以上？試述之？　（10分）
6. 清潔劑有幾種？其成分如何？（以化學式表示之）其去污洗滌作用的模型如何？試繪圖說明之。　（10分）

參考解答

1. 答：
   (A) 同分異構物。　（3分）
   (B) 乙醇，因醇分子間有氫鍵，二甲醚沒有。　（3分）
   (C) 可互溶，二甲醚可接受乙醇的氫鍵。　（3分）
   (D) 乙醇是酸也是鹼。　（6分）
   $2\,C_2H_5OH + 2\,Na \rightarrow 2\,C_2H_5ONa + H_2$ 乙醇是酸。

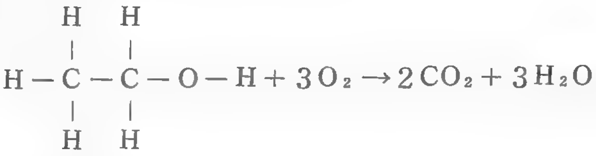
$C_2H_5OH + H^+ \rightleftarrows C_2H_5\overset{H}{\underset{+}{O}}H$　　　乙醇是鹼。

(E) 二甲醚只是鹼，不是酸。 （３分）

$CH_3OCH_3 + H^+ \rightleftarrows CH_3\overset{+}{\underset{H}{O}}CH_3$

(F) $C_2H_6O + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$ （２分）

乙醇



鍵能　$5\ C-H = 414 \times 5 = 2070$ KJ

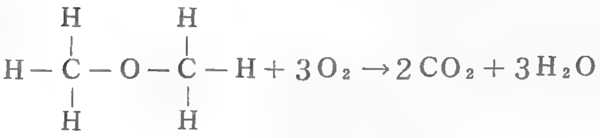
$C-C =$ 360

$C-O =$ 360

$O-H =$ 464

3254 KJ

二甲醚 （３分）



鍵能　$6\ C-H = 414 \times 6 = 2484$ KJ

$2\ C-O = 360 \times 2 = 720$

3204

$3O_2$，$2CO_2$，$3H_2O$的鍵能在兩者反應過程均相同 （３分）

乙醇鍵斷裂多吸收 $3254 - 3204 = 50$ KJ/mol （２分）

而且乙醇尚須要氣化熱　40 KJ/mol

故乙醇燃燒熱少　$40 + 50 = 90$ KJ/mol （２分）

2. 答：

(A) 設所生成NH_3爲 x meq.

則　$x + 0.5 \times 5.0 = 0.5 \times 20$　　$x = 7.5$ meq. （４分）

NH_3重 $= 17$ mg/meq $\times 7.5$ meq $= 127.5$ mg. （６分）

(B) 設蛋白質重量爲 y mg

則含氮量爲 0.16 y mg

由(A)　含氮量 $= 127.5\text{ mg} \times \frac{14}{17} = 0.16$ y mg

$\therefore \quad y = 656.3\ (mg)$ （4分）

故蛋白質百分率濃度 $= \dfrac{0.6563\,g}{1.06\,g/mL \times 10\,mL} \times 100\% = 6.19\%$ （6分）

3. 答：

(A) 設酸的分子量爲M

則 $\dfrac{0.264\,g}{M\,g/mol} = 0.10\ mol/L \times 0.030\,L \quad \therefore \quad M = 88$

$C_nH_{2n+1}COOH = C_{n+1}H_{2n+2}O_2$

$12(n+1)+2n+2+16\times 2 = 14n+46 = 88 \quad \therefore \quad n = 3$

酸是C_3H_7COOH，酯甲是$C_3H_7COOCH_3$ （8分）

(B) 設醇丁爲ROH，分子量爲M

$2\,ROH + 2\,Na \rightarrow 2\,RONa + H_2$

2 Mg醇丁可產生氫 22.4 L

則醇丁的莫耳數爲氫莫耳數的兩倍

故 $\dfrac{0.23\,g}{Mg/mol} = 2 \times \dfrac{0.05600L}{22.4\,L/mol} \quad \therefore \quad M = 46$

醇丁是 $C_nH_{2n+1}OH = C_nH_{2n+2}O$

$12 \times n + 2n + 2 + 16 = 46 \quad \therefore \quad n = 2$

醇丁是 C_2H_5OH

故酯乙爲 $C_2H_5COOC_2H_5$ （6分）

(C) 酯丙是 $CH_3COOC_3H_7$，產生的醇戊，氧化後不呈酸性，而不呈銀鏡反應，故化合物己是丙酮（CH_3COCH_3），醇戊是二級醇2-丙醇$CH_3CHOHCH_3$

（6分）

4. 答：

(a) $CH_{4(g)} + 2O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)} + 2H_2O_{(l)}$ （2.5分）

(b)
$$\begin{array}{l} CH_2-OH \\ | \\ CH-OH \\ | \\ CH_2-OH \end{array} + 3\,HNO_3 \rightarrow \begin{array}{l} CH_2-NO_2 \\ | \\ CH-NO_2 \\ | \\ CH_2-NO_2 \end{array} + 3\,H_2O$$
（2.5分）

(C) $CH_{4(g)} + Cl_{2(g)} \xrightarrow[\Omega\triangle]{hw} CH_3Cl + HCl$ （2.5分）

$\quad\quad\quad\quad CH_3Cl \xrightarrow[hw\Omega\triangle]{+Cl_2} CH_2Cl_2 + HCl$

$\quad\quad\quad\quad CH_2Cl_2 \xrightarrow[hw\Omega\triangle]{+Cl_2} CHCl_3 + HCl$

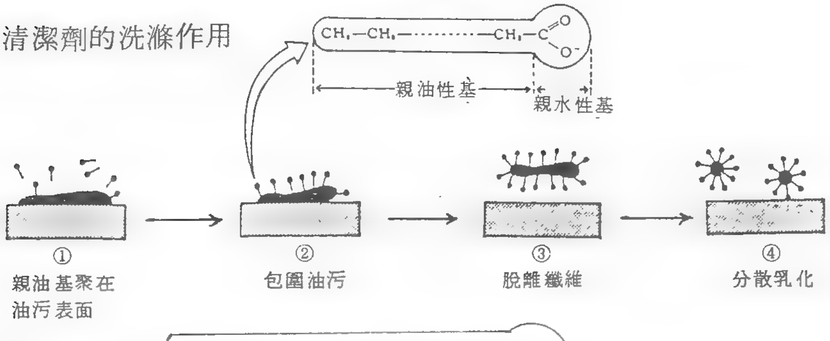
$\quad\quad\quad\quad CHCl_3 \xrightarrow[hw\Omega\triangle]{+Cl_2} CCl_4$

(D) $C_2H_5OH + CH_3-C(=O)-OH \xrightarrow{H^+} C_2H_5-O-C(=O)-CH_3 + H_2O$ (2.5分)

5. 答：因為碳原子不僅能自相以單鍵、雙鍵或參鍵自相連結而蔓延擴大，又能與許多其他元素結合；碳原子能夠形成多個原子之長鏈，亦可成各種大小環型的結構，另外鏈與環又可有支鏈與交叉鏈。各碳原子間本身結合或與其他原子的結合常會因結合排列狀態以及相關位置、組態的不同而生成化學與物理性質不同的異構物，因此有機物的種類當然就龐大不可限量。 （10分）

6. 答：清潔劑重要是指肥皂和合成清潔劑（2分）。清潔劑成分大多是由一個非極性的長鏈狀碳氫化合物和長鏈的一端連結一個帶有電荷之原子團的塩類。肥皂的通式為 $R-COO^-Na^+$，（R含有12-20個碳原子）。合成清潔劑則為長鏈醇類轉變製成之烷基硫酸塩類（如 $n-C_{11}H_{23}CH_2OSO_3^-Na^+$ ）。

清潔劑的洗滌作用



（4分）

合成清潔劑 $CH_3-CH_2\cdots\cdots CH_2-SO_3^-$ Na^+

親油性基 ⊢親水性基⊣ （2分）

肥　皂 $CH_3-CH_2\cdots\cdots CH_2-C\genfrac{}{}{0pt}{}{O}{O}$ Na^+

親油性基 ⊢親水性基⊣ （2分）

參、實作測驗及講評

實驗部分包括實作一「未知溶液的分析」與實作二「原子量的測定」，前者純屬定性分析，後者由測定金屬的比重以及其與酸的作用，測定所產生氫氣的量（體積）以求未知試樣（金屬）的原子量。這兩個實作題均屬綜合性的實驗題目，除了考驗學生的實驗技巧之外，很重視學生自行設計實驗的能力。兩個實驗的成績，學生的表現落差很大，有不少學生得滿分或幾近滿分的，但也有學生表現非常不理想。在閒談時，有的學生坦白地說，在學校從未做過實驗。學生的表現請參考「決賽成績表」。

實作一：未知溶液的分析

桌上有12支點滴用吸管（編號1～12），其中有一支爲酚酞指示劑（0.2％的酒精溶液），其餘11支爲各種化合物的0.1％水溶液，含有下列離子：

H^+	Ag^+	Br^-	CO_3^{2-}	HCO_3^-
K^+	Ba^{2+}	Cl^-	NO_3^-	
	Na^+	OH^-	SO_4^{2-}	

試著只使用桌上的器材，一一分辨之。

問題一、寫出未知溶液中，化合物的化學式（酚酞寫中文名稱即可）。　（92分）

答：

	陽離子	陰離子		陽離子	陰離子		陽離子	陰離子
1.	____	____	2.	____	____	3.	____	____
4.	____	____	5.	____	____	6.	____	____
7.	____	____	8.	____	____	9.	____	____
10.	____	____	11.	____	____	12.	____	____

以上每寫對一離子得4分，答錯倒扣1分。

問題二、寫出你找尋未知溶液3、4、5的方法。　（18分）

答：

實作二：原子量的測定

目的：利用化學反應求出金屬的原子量

藥品：6 N　HCl

未知金屬 3 g（可能為 Zn ，Mg ，Al ，Fe 中的一種）

儀器：250 mL 錐形瓶，500 mL 錐形瓶，600 mL 燒杯，玻璃瓶，橡皮管，鐵夾，溫度計，量筒 10 mL ，50 mL ，100 mL 各一個，秤量紙，刮勺一支，玻璃彎管，玻璃滴管。

實驗過程及裝置（參考用）：

1. 按圖裝置儀器，B 瓶與 D 杯中裝水，高度如圖所示，仔細檢查橡皮管是否有破裂之處。檢查完成後，使 C 橡皮管充滿水，用鐵夾夾緊。
2. 鬆開鐵夾，使 B 瓶與 D 杯的水可由水面高度的調節而能來回流動，且使 C 管一直充滿水。
3. 將 A 瓶的塞子打開，加入 1.38 克的 $NaNO_2$ 和 50 mL 的水。
4. 用一張乾淨的秤重紙在天平上秤取 1.5 克的胺基磺酸（HSO_3NH_2）。

實驗裝置如圖：

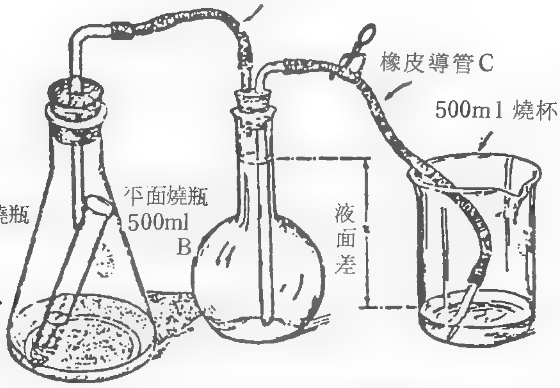


圖 3-1　氮氣之莫耳體積測定

5. 小玻璃瓶洗淨乾燥後，秤重秤到 0.01 克。將量好的 HSO_3NH_2 倒入其中，再秤其重量。輕輕將小瓶放入 A 瓶中，使小瓶斜靠於 A 瓶壁，切勿使 $NaNO_2$ 溶液流入，放妥後將塞子塞緊。
6. 調節 B 瓶與 D 杯中的水面，達到水平後表示 A 、B 二瓶中的壓力與大氣壓力相同，此時將 C 夾夾緊，並將燒杯中的水倒掉。
7. 將 A 瓶傾斜，瓶中的 $NaNO_2$ 即可與 HSO_3NH_2 混合立刻將 C 夾鬆開。混合後立即可觀察到有氮氣之產生。繼續輕輕搖動 A 瓶，2 至 3 分鐘後反應即可完成。此反應係放熱反應，故須等五分鐘，待溫度下降後才調節其壓力。調整燒杯 D 與 B 瓶內的水在同一平面後，再將夾子夾緊，讀出此時溫度。

8. 取下D杯，用量筒量取D瓶內之水量，即可算出氮氣所佔之體積。

金屬	Zn	Mg	Al	Fe
比重	7.14	1.74	2.70	7.86

問題：

1. 該未知金屬爲何種金屬？並測出其比重爲若干？
2. 請寫出您所設計的實驗步驟及藥品的用量？
3. 請決定該金屬的原子量爲多少？

參考解答及講評

實作一：未知溶液的分析講評

問題一的12種化合物名稱如下：

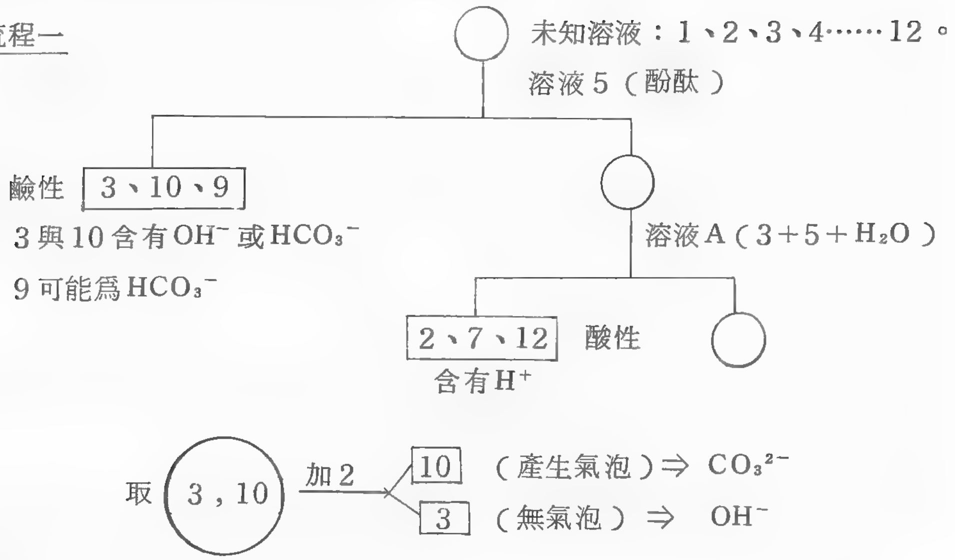
(1) 溴化鈉	(2) 塩　酸	(3) 氫氧化鈉	(4) 硝酸銀
(5) 酚　酞	(6) 氯化鋇	(7) 硫　酸	(8) 氯化鉀
(9) 碳酸氫鈉	(10) 碳酸鉀	(11) 硫酸鈉	(12) 塩　酸

問題二、找尋未知溶液的方法很多，以下僅舉其中之一例供作參考：

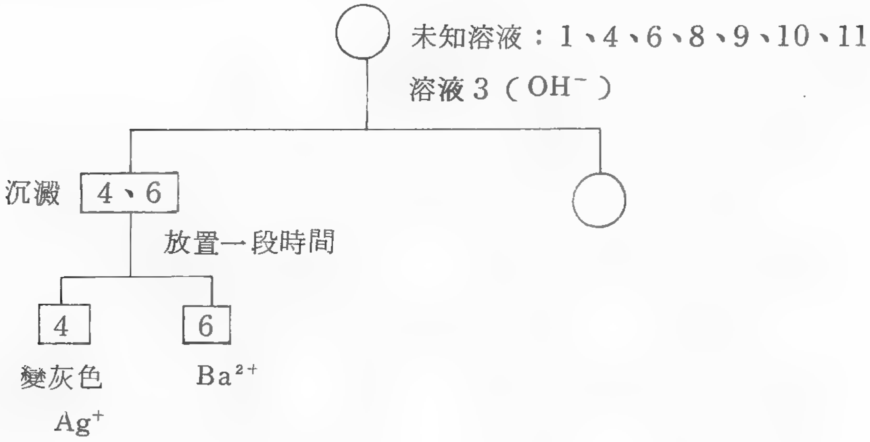
1. 將未知溶液各滴1滴於紙上，其中只有5號的那一滴立即擴散，其餘均成小水珠，因試題曾提示只有酚酞指示劑的那一支爲酒精溶液，其餘 11 支均爲水溶液。
2. 以5號的試劑滴在上列各滴上，結果3號與 10 號呈紅色，而9號呈淡粉紅色，可推論3號與 10 號爲鹼性溶液，含有OH^-或CO_3^{2-}，而9號可能是HCO_3^-。
3. 自行配製備用溶液：取3號與5號兩種溶液各兩滴，並加蒸餾水6滴，混合均匀得粉紅色溶液(定名A)，吸入於備用的吸管。
4. 在上列各滴(除了3、5、9、與10號之外)，滴上A溶液1滴，混合均匀，則見2、7、12號等3種試劑，可以褪溶液A的粉紅色，可推論這三種試劑爲酸性溶液(如流程一)。
5. 在未知溶液1、4、6、8、9、10、11號的溶液各1滴上，分別滴下3號溶液1滴，結果4與6號的溶液產生沉澱。由題意所給的五種陽離子(H^+、K^+、Ag^+、Na^+、Ba^{2+})中，能與OH^-產生沉澱的只有Ag^+與Ba^{2+}。將沉澱靜置一段時間後，4號的沉澱變成灰色，6號的仍爲白色沉澱，因此認爲4號含有Ag^+，而6號含有Ba^{2+}(如流程二)。

6. 取未知溶液 1、2、6、7、8、11、12　各 1 滴分別置於點滴盤（塑膠袋內有黑色紙的一面）上，然後在其上各滴下 4 號溶液 Ag^+ 各 1 滴，結果1 號溶液產生淡黃色沉澱，表示含有 Br^-。另外 2、6、8、12　等號溶液產生白色沉澱（如流程三所示），表示含有 Cl^- 離子。因由流程一知道 2 與 12 爲酸性溶液，故可以認爲 2 與 12 均爲 HCl 溶液，而 6 號爲 $BaCl_2$ 溶液（由流程二知道 6 號溶液的陽離子爲 Ba^{2+}）。
7. 分別取未知溶液各 1 滴置於點滴盤上，各滴下 $BaCl_2$（6 號）溶液 1 滴，結果 7、10、11 號溶液均產生白色沉澱可能爲 $BaSO_4$ 或 $BaCO_3$。因已知 7 號爲酸性溶液（流程一），所以可推想7 號溶液爲 H_2SO_4（流程四）。
8. 取未知溶液 9、10、11 各 1 滴，分開置於點滴盤上。在各滴上加 2 號溶液(HCl) 1 滴後，靜置一段時間，再觀察，結果 9 號產生氣泡相當多，10 號產生氣泡較少，而不見 11 號溶液有何氣泡產生，因此認爲 9 號爲 HCO_3^-，10 號爲 CO_3^{2-}，而 11 號則爲 SO_4^{2-}（流程五）。
9. 至此未知溶液中，其陽離子尚未認定者有 1、3、8、9、10、11 等 6 種溶液。以鉑絲做各溶液的焰色試驗，結果 1、3、9、11 爲 Na^+，而 8 與 10 號溶液爲 K^+。因此配合流程一至五的結果，可以推想 1、3、9、11 號溶液分別爲 NaBr、NaOH、$NaHCO_3$、Na_2SO_4，而 8 與 10 號溶液分別爲 KCl 與 K_2CO_3。
10. 溶液 4 的陽離子爲 Ag^+，而因其爲中性溶液故陰離子不是 OH^-，也不是鹵素離子（Br^- 或 Cl^-）。另外溶液 4 既不與酸產生氣泡，又不與 Ba^{2+} 產生沉澱，故其陰離子不是 HCO_3^-、CO_3^{2-}、或 SO_4^{2-}。從題意所給的 7 種陰離子中，除去上舉 6 種陰離子後，只剩下 NO_3^- 一種，因此可推論溶液 4 爲 $AgNO_3$。
11. 以上所述係「認定」12 種未知溶液的方法之一，所得結果應該再經「確認」。例如 6 號溶液的焰色與 Na^+ 或 K^+ 有明顯的不同，從題意的陽離子中，可以認定其爲 Ba^{2+}，而溶液 6 與溶液 4 反應產生白色沉澱（AgCl），因此可以確認溶液 6 爲 $BaCl_2$。

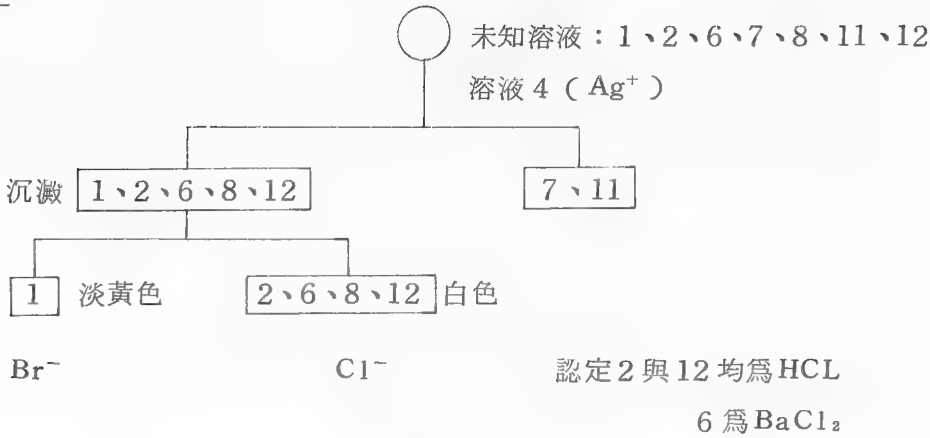
流程一


未知溶液：1、2、3、4……12。
溶液5（酚酞）
鹼性
3、10、9
3與10含有OH^-或HCO_3^-
9可能爲HCO_3^-
溶液A（3+5+H_2O）
2、7、12
酸性
含有H^+
取
3，10
加2
10
（產生氣泡）⇒ CO_3^{2-}
3
（無氣泡）⇒ OH^-

流程二


未知溶液：1、4、6、8、9、10、11
溶液3（OH^-）
沉澱
4、6
放置一段時間
4
6
變灰色
Ag^+
Ba^{2+}

流程三


未知溶液：1、2、6、7、8、11、12
溶液4（Ag^+）
沉澱
1、2、6、8、12
7、11
1
淡黃色
2、6、8、12
白色
Br^-
Cl^-
認定2與12均爲HCL
6爲$BaCl_2$

流程四

未知溶液：7、9、10、11

溶液 6（ $BaCl_2$ ）

沉澱 7、10、11

9

$7 \rightarrow BaSO_4$ ⇒ 認定溶液 7 為 H_2SO_4

$\left.\begin{matrix}10\\11\end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix}BaSO_4\\BaCO_3\end{matrix}\right.$ （由流程一，知 7 為酸性溶液）

流程五

未知溶液：9、10、11

溶液 2（HCL）

放置一段時間

9	10	11
氣泡較多	氣泡少	無氣泡
HCO_3^-	CO_3^{2-}	SO_4^{2-}

流程六

未知溶液：1、3、8、9、10、11

焰色試驗

1、3、9、11	8、10
Na^+	K^+

由此認定 1 $NaBr$

3 $NaOH$

9 $NaHCO_3$

11 Na_2SO_4

8 KCl

10 K_2CO_3

（未完待續）

中華民國參加1995年
亞太數學奧林匹亞競賽名單出爐

中華民國數學奧林匹亞委員會

由中華民國數學奧林匹亞委員會主辦，國立臺灣師範大學數學系、中央研究院數學研究所及中華民國數學學會共同協辦之亞太數學奧林匹亞研習營，計有來自全國各公私立中學六十一位數學資優生參加自二月十三日～十七日爲期五天的研習營，共計舉行一次模擬考及五個專題 16 道問題之獨立研究解答，並參考過去參加全國性數學競賽之優異紀錄，於民國八十四年二月十六日舉行之執行培訓聯合會議中，符合如下三種條件並有參加意願者，本次研習營中共有陳耀將等四十一位學生獲得推薦參加一九九五年三月十四日在中華民國舉辦之亞太數學奧林匹亞競賽，角逐前十名之金、銀、銅、榮譽獎代表權資格：

1. 模擬競試總分達 16 分以上共 35 名（滿分 35 分）。
2. 獨立研究成績達 40 分以上者另加 4 名（滿分 102 分）。
3. 模擬競試任意兩題總分達 11 分以上者再加 2 名。

另外，根據調查，上一年度曾參加亞太數學奧林匹亞競賽現仍在中學就讀且有意願繼續參加本年三月之競賽計有陳和麟等十七名，總共合計有五十八名角逐代表中華民國參加本屆亞太數學奧林匹亞競賽；本次競賽將於三月十四日在國立臺灣師範大學理學院中正堂舉行。依據教育部中等學校學生參加國際數理奧林匹亞競賽保送升學實施要點，高級中學學生獲得亞太數學奧林匹亞競賽金牌者（1 名），得依其志願申請保送大學理、工、農學院各學系，獲得銀、銅牌獎者（6 名）得申請保送數學系，而國民中學學生獲得銅牌獎以上者，且其年齡符合入學規定者得依其志願保送高級中等學校就讀，這些成績優異的前二十名更有機會角逐代表我國參加第三十六屆在加拿大舉行之國際數學奧林匹亞競賽，爭取更高的榮譽。預定參加本屆亞太數學奧林匹亞競賽名單如下：

(一) 一九九五年中華民國亞太數學研習推薦參加競賽計四十一位。

編號	姓　名	性別	出生日期	就讀學校	年級	指導老師	備　　　註
95MP01	陳耀將	男	64.09.08	師大附中	三	陳淑娃	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP02	藍凱文	男	66.03.07	建國中學	三	楊維哲	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP03	陳怡中	男	67.09.16	高雄中學	三	王武長	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP04	陳嘉宏	男	67.02.02	新竹實中	三	施文彬	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP05	黃鼎鈞	男	66.03.07	港明高中	三	黃麗生	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP06	胡裕華	男	67.08.08	師大附中	二	林雲壽	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP07	蔡篤豪	男	67.12.03	台中一中	二	朱標宗	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP08	邱俊文	男	66.12.13	嘉義高中	三	郭茂雄	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP09	林冠明	男	67.07.22	建國中學	二	徐正梅	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MP10	李光祥	男	66.01.04	羅東中學	三	魏木樹	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95ME03	莊智仰	男	66.12.28	台南一中	三	朱國頌	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95ME04	卓士堯	男	66.11.02	建國中學	三	林礽堂	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95ME05	吳宗宇	男	67.08.24	台南一中	二	蔡總湖	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG02	魏如慧	女	67.05.12	北一女中	二	李政貴	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG03	高孟平	男	67.06.02	建國中學	二	徐正梅	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG04	陳昭羽	男	67.09.19	建國中學	二	徐正梅	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG08	林彥亨	男	67.08.07	板橋中學	二	陳宏澤	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG11	余正道	男	66.07.20	新竹實中	三	葉東進	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG12	胡正彥	男	66.10.17	新竹實中	三	葉東進	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG13	陳德筌	男	66.09.27	新竹高中	三	許燦煌	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG19	蘇育玄	男	68.05.29	彰化高中	一	李昆穆	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG24	簡裕明	男	67.02.03	嘉義高中	三	丘欣榮	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG25	陳昭蓉	女	67.10.23	台南女中	二	傅祖楫	模擬競試總分達十六分(含)以上者

編號	姓　名	性別	出　生	就讀學校	年級	指導老師	備　　註
95MG28	林榮欽	男	66.11.07	台南一中	三	朱國頌	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG34	陳遠銘	男	66.01.19	宜蘭高中	三	莊信明	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS01	朱家杰	男	67.02.14	新竹實中	二	蔡聰明	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS02	曾祥華	男	67.08.15	新竹實中	二	張瑞吉	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS03	方裕元	男	67.09.21	建國中學	二	蔡聰明	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS04	鍾佩勳	男	67.07.15	師大附中	二	蔡聰明	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS06	吳柏樟	男	68.06.25	台南一中	一	黃永裕	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS08	黃信淳	男	65.10.29	高雄中學	三	羅春光	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS09	王俊傑	男	66.10.26	高雄中學	二	羅春光	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS10	李浩銘	男	68.03.23	高雄中學	二	羅春光	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MS13	陳建華	男	66.04.12	台中一中	三	林來居	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MC01	陳明揚	男	70.04.22	師大附中	國二	嚴宗增	模擬競試總分達十六分(含)以上者
95MG33	游承翰	男	67.10.29	宜蘭高中	二	李後鈴	獨立研究成績達四十分(含)以上者
95MG29	莊涵琄	女	66.10.19	高雄女中	三	葉慶文龍	獨立研究成績達四十分(含)以上者
95MG14	嚴正機	男	66.09.27	新竹高中	三	許燦煌	獨立研究成績達四十分(含)以上者
95MS14	鍾伯宗	男	66.07.10	武陵高中	三	林來居	獨立研究成績達四十分(含)以上者
95MG09	王致言	男	67.10.05	武陵高中	二	盧澄根	模擬競試任意兩題總分達十一分者
95MG01	戴碧如	女	66.12.24	北一女中	二	李政貴	模擬競試任意兩題總分達十一分者

註：另有二位成績合乎研習營推荐標準，但經調查無參賽意願：

95MG23　洪浩舜（嘉義高中）：模擬競試總分已達十六分(含)以上者而個人經調查無參賽意願。
95MG26　蔡秋雲（台南女中）：模擬競試總分已達十六分(含)以上者而個人經調查無參賽意願。

(二) 曾參加一九九四年亞太數學奧林匹亞競賽但仍有意願且符合參賽資格名單計十七名。

編號	姓名	性別	出生	就讀學校	年級	指導老師	備註
95MA01	陳和麟	男	67.01.11	建國中學	二	徐正梅	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA02	王之群	男	65.01.08	建國中學	三	林礽堂	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA03	邱奕智	男	66.03.05	建國中學	三	蕭慈雲	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA04	林俊良	男	66.03.19	建國中學	三	林礽堂	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA05	林挺宇	男	66.07.28	成功中學	三	王安部	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA06	李俊瑋	男	67.08.07	板橋中學	二	陳宏澤	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA07	陳佑駿	男	66.02.11	武陵高中	二	盧澄根	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA08	鐘培碩	男	66.03.05	武陵高中	三	胡方彰	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA09	胡俊光	男	67.02.02	新竹高中	三	許燦煌	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA10	舒正州	男	66.03.19	台南一中	三	朱國頌	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA11	蘇柏青	男	67.10.08	台南一中	三	朱國頌	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA12	周星賢	男	67.01.11	精誠高中	三	高昭南	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA13	李品賢	男	66.07.28	嘉義高中	三	郭茂雄	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA14	施志遠	男	66.02.22	台南一中	三	朱國頌	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA15	余家光	男	65.06.28	高雄中學	三	楊鈺彬	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA16	吳卓鍇	男	65.01.08	高雄中學	三	楊鈺彬	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格
95MA17	吳逸帆	男	67.01.11	高雄中學	三	康福欽	曾參加APMO競試現仍符合參賽資格

★

統 一 編 號
006388830130

科教論著

當今科學概念發展研究賦予科學學習的新意義
……許榮富、黃芳裕 2

課程研究

我國中等學校地球科學課程的回顧與展望……李春生 14

科學教室

對畢氏三元數公式的一番探索……黃敏晃 22

評　量

臺北市八十三學年度高級中學數學及自然學科競賽
數學科複賽試題及參考解答…國立臺灣師範大學數學系 33
教育部八十三學年度高級中學數學競試
決賽試題及參考解答……林來居 40
教育部八十三學年度高級中學化學科競賽
總決賽活動與試題參考解答(二)……
……方泰山、蕭次融、左如茜 50

科教活動報導

教育部八十三學年度高級中學數學及自然學科
資賦優異學生甄試保送初訊……編輯室 21
中華民國參加 1995 年亞太數學奧林匹亞
競賽名單出爐……中華民國數學奧林匹亞委員會 70